二因子實質消費資本資產訂價模型

張俊評、徐燕山*

摘　要

本文以抗通膨資產做為實質投資人評價實質超額報酬的基礎，推導出二因子實質消費資本資產訂價模型，均衡模型中的二個因子分別是通膨風險因子與消費成長風險因子。實證結果顯示，二因子實質消費資本資產訂價模型可以解釋 30.23% 橫斷面股票報酬之變異。在本文架構下，本文導出 S+2 共同基金定理，這些基金可能為 (1) 完全規避通膨風險債券資產；(2) 市場投資組合；(3) S 個有高度相關性的投資組合。

關鍵詞：實質消費、共同基金定理、完全規避通膨風險債券資產
JEL 分類代號：G10, G11, G12

---

* 兩位作者分別為聯絡作者：張俊評，亞洲大學財務金融學系助理教授，41354 台中市霧峰區柳豐路 500 號，電話：04-23323456 轉 5481，E-mail: changjp@asia.edu.tw。徐燕山，國立政治大學財務管理學系教授，11605 台北市文山區指南路二段 64 號，電話：02-29393091 轉 81246，E-mail: ysshiu@nccu.edu.tw。作者感謝二位匿名審稿人的寶貴意見與指正，以及胡聯國教授、林修葳教授、黃達業教授與張元晨教授對本文內容的建議。其次，作者要感謝臧仕維教授在本文實證研究計量及統計上的協助。最後，本文的任何錯誤，都是作者的責任。

投稿日期：民國 98 年 12 月 3 日；修訂日期：民國 99 年 5 月 5 日；接受日期：民國 101 年 3 月 9 日。

經濟研究 (Taipei Economic Inquiry), 49:2 (2013), 297-356。
臺北大學經濟學系出版

1. 導論

均衡訂價理論一直是財務研究領域中不可忽視議題之一，這套理論源於 Sharpe (1964) 與 Lintner (1965)，他們利用市場上無風險性資產與可交易風險性資產，完成二項共同基金定理 (two fund separation theorem)，然後推導出均衡的靜態資本資產訂價模型 (static capital asset pricing model, static CAPM)，稱為 Sharpe-Lintner static CAPM。接著，Merton (1973) 提出多貝它概念 (multi-beta intertemporal capital asset pricing model, multi-beta ICAPM)，以補強 Sharpe-Lintner static CAPM 風險溢酬不足的缺陷。在 Merton (1973) 的內文，非預期通膨風險溢酬可做為風險溢酬的一部份，這個看法與 Cox et al. (1985a) 證實非預期通膨因子會影響公司生產機會，應給予風險補償一致。Stulz (1986) 認為非預期通膨風險與資產價格間的動態均衡關係是：投貨人貨幣需求改變進而影響到投資人的資產配置以及效用所造成的。不過，Fama (1981) 認為造成通膨因子與股票報酬顯著相關的原因是實質生產成本，而非貨幣市場的需求變化。Bakshi and Chen (1996) 以 Stulz (1986) 為架構，加入期間結構的概念，進一步發現實質資產價格與物價、利率期間結構、實質利率以及名目利率均為內生聯立訂價風險因子。Brennan and Xia (2002) 則從定價核 (pricing kernel) 的觀點，發現資產價格確實與影響投資／生產可能機會集合的狀態變數和資產期間結構因素有關。與上述文獻比較，本文的研究動機則是從抗通膨資產功能以及實質消費成長尋找出非預期通膨風險與資產報酬的對價關係。

在實證文獻上，Fama and Schwert (1977) 發現股價與通貨膨脹間出現顯著負向關係，其原因為生產成本增加、資金成本提高以及資金替代效應。[1] Friedman (1980) 發現，在通貨膨脹期間，市場上

[1] Fama and Schwert (1977) 認為顯著負向關係是來自於下列原因：(i) 物價上漲，生產成本增加，增加之成本無法完全轉嫁，導致報酬下降；(ii) 物價上漲，投資者評估股價實值價值所用的折現率會提高，其他條件不變之下，價格下跌；(iii) 物價上漲時，產生替代效應，投資者把資金從股市抽出，轉而投資於房地產或黃金等保值物品上，使得股市缺乏資金，造成股價下跌。

的資金供給者會因為可獲得實質報酬較少，比較不願意貸出款項給資金需求者，而因為實質借款成本較低，資金需求者會傾向在通膨時期借入款項，Friedman (1980) 實證結果也顯示投資人看重通膨風險因子。然而，這些實證文獻缺乏理論說明非預期通膨風險變化如何影響投資人效用以及消費行為。除此，若這層對價關係是從投資機會的管道演變而來，從 Breeden (1979) 觀點此訂價因子應會消失在單因子消費資本資產訂價模型之中。[2]

固然如此，Breeden et al. (1989)、Yogo (2006)、Jagannathan and Wang (2007) 還是認為消費成長風險因子 (consumption growth beta)，很難可以 “單獨” 解釋個別資產投資組合報酬率之間的變異，尤其，使用非耐久財消費代替總合消費時。例如，Yogo (2006) 發現非耐久財總合消費需搭配耐久財的總合消費所呈現的訂價效果比 CAPM、三因子模型以及單一消費因子模型來得好。所以，本文認為單一消費成長風險因子與資產報酬間的實證關係並不明確，可能是來自於其他訂價因子。因此，我們推論非預期通膨風險因子在 Breeden (1979) 架構下可能是存在的，它不一定透過投資機會集合來呈現它的訂價效果，而需要其他因子輔助才能解釋橫斷面報酬的差異性。

本文遵循 Breeden (1979) 架構，把財富限制式修改成實質財富限制式，效用部份也同時修改成以實質消費來計數。這樣做法可將物價指數變化對資產價格的影響透過實質財富限制式以及效用函數型態表達出來，而非藉由投資／生產機會集合變化來顯現實質關係。在滿足均衡條件後，訂價模型中的二因子分別是通膨風險因子

---

[2] Breeden (1979) 認為影響投資機會集合的狀態變數難以確認。類似的文獻，例如 Cox et al. (1985a)、Bakshi and Chen (1996)，也會碰到訂價因子如何確認的問題。因此，Breeden (1979) 提議且假設所有相關動態變數皆會反應在消費成長上，而把多元貝它跨期資本資產訂價模型，濃縮成單一消費成長風險因子的資本資產訂價模型 (single-beta consumption capital asset pricing model, single-beta CCAPM)。這個概念隱含著通膨風險訂價因子也消失在消費資本資產訂價模型之中。

與消費成長風險因子。顯然，這個發現與 Breeden (1979) 認為通膨風險訂價因子會消失在消費資本資產訂價模型中的命題不同，而且也與 Merton (1973)、Cox et al. (1985a) 強調通膨風險與資產價格的關係是建立在生產可能機會集合並不一致。不管從何種構面來看，對於實質跨期資本資產訂價模型 (real intertemporal capital asset pricing model, real ICAPM) 與實質消費成長資產訂價模型 (real consumption capital asset pricing model, real CCAPM) 二個訂價模式來說，通膨風險是系統性風險因子。因此，檢定時要把非預期通膨風險溢酬納入實證模型內。

在共同基金定理部份，Merton (1973) 以利率風險會影響投資機會集合為由，設計出第三個共同基金，這個基金是用來規避投資人面對投資機會集合變動時所產生的風險。隨後，Breeden (1979) 延伸了 Merton (1973) 的模型架構，進一步擴展共同基金定理，提出 S+2 個共同基金定理。這個基金定理說明如下：投資人在面對 S 個會影響投資機會集合下的狀態變數時，諸如：非預期物價膨脹、實質利率，與工業生產指數變化等狀態變數，投資人必須額外建立 S 個基金部位，才能有效地規避掉狀態變數變化所產生的影響。需要注意的是，當市場投資組合無法包羅萬象的時候，投資人處在一個不完整的交易市場內，此時需多納入新的共同基金來規避額外系統性風險，而不是全交由市場投資組合解決。Bodie et al. (1992) 建議投資人需額外購置有關人力資本的共同基金來規避工資不確性。Lioui and Poncet (2003) 則建議納入一個由遠期契約組成的共同基金來規避市場投資組合之外的風險，因此市場存在 S+3 個共同基金。Chu (2006) 做法也是如此，房地產指數共同基金不包含在市場投資組合，藉此來規避投資組合報酬不確定性。

近期的發展，為能獲得更精確的價格封閉解和更深入瞭解共同基金定理，把觸角延伸至資產投資的期間結構，而這類研究開始的首要工作必須將效用函數型態具體化如固定相對風險趨避 (constant relative risk averse, CRRA) 或雙曲絕對風險趨避 (hyperbolic absolute risk averse, HARA)，以及把影響投資機會集合的因子侷限在幾個狀態變數上。Kim and Omberg (1996) 針對 HARA 投資人的投資行為進行研究，發現長期投資人會比短期投資人持有較多的風險性資產，然而二者型態的投資人皆會提撥一個共同基金部位來規避動態風險溢酬變化。Berkelaar and Kouwenberg (1999) 探討 CRRA 投資人在面臨預期通膨風險變化時如何進行資產配置，才能極大化個人實質財富。在他們研究報告中，指出為維持一定的實質報酬，除了需持有無險資產以及市場投資組合，還必須額外提撥兩個基金部位用來規避非預期通膨風險以及預期通膨風險所產生的不利影響。Brennan and Xia (2002) 利用定價核的方式說明 CRRA 投資人如何能在非預期通膨風險、利率、預期通膨風險發生變化時，還可藉由精確的投資組合權重，維持一定實質報酬。Munk et al. (2004) 的做法與 Brennan and Xia (2002) 雷同，把影響投資機會集合的因子，限制在利率、超額報酬以及預期通膨風險因子三個狀態變數的討論，因而發現投資人要維持固定實質報酬，必定要持有無風險資產、市場投資組合、可規避非預期通膨風險、可規避利率變化、可規避預期通膨風險以及可規避超額報酬變化的共同基金部位。

我們從上述的討論，可以看出這些文獻在處理非預期通膨風險時，解決之道在於提供一個額外的共同基金。本文雖然並沒有如他們針對特殊效用型態的投資人和期間結構因素相關的封閉解深入討論，但是我們考量的狀態因子較多以及本文並不需要利用共同基金，且只要利用抗通膨風險共同基金，諸如通貨膨脹保值債券 (treasury inflation-protected securities, TIPS)，做為實質投資人實質超額報酬的評價基礎，即可解決非預期通膨風險問題。

以抗通膨風險共同基金替代無風險性資產，在 S 個實質狀態變數干擾下，本文找到新的 S+2 共同基金定理。S+2 共同基金定理的內涵說明了市場只須提供市場投資組合基金、完全規避非預期通膨風險債券資產，及 S 個規避實質狀態變數風險的共同基金，就可以讓投資人財富有效分配。完全規避非預期通膨風險債券資產 (the inflation-indexed bond) 可以取代 Munk et al. (2004) 提供的共同基金中的兩項資產：無風險性資產與規避非預期通膨風險的共同基金。因此，我們的提議可以降低投資組合的交易成本。

本文其餘章節安排如下：第 2 節介紹市場結構與模型設定，第 3 節則是在實質均衡觀念下，推導資產價格與訂價因子的關係，第 4 節則介紹實證模型與方法以及實證結果，最後一節為結論。

2. 市場結構與模型設定

本節介紹市場結構、資產的投資機會集合、實質狀態變數集合、實質財富預算限制式，以及實質投資人目標效用函數。

2.1 市場結構

本節說明市場內投資人特質以及市場運作的交易機制。

2.1.1 投資人特質與市場交易機制

何謂實質投資人？本文界定實質投資人為在實質財富預算限制式之下，謀取最大總合實質消費效用。實質投資人看重的是實質報酬，而非名目報酬和名目消費帶給他的效用。

在本文內，實質投資人所買賣的股票，是不發放任何現金股利，而且可以連續交易，在交易時沒有摩擦性交易成本，實質投資人的賣空行為不受任何限制，最後，市場永遠處於實質均衡狀態。

2.2 模型設定

2.2.1 動態投資機會集合與實質狀態變數集合

在介紹實質投資人的動態投資機會集合之前，必須先討論實質投資人可交易資產，本文假設市場上存在 $N+1$ 個可交易資產，其動態過程分別如下：

$$\frac{dB}{B}=R(\underline{s})dt， \tag{1}$$

$$\frac{dA_j}{A_j}=\mu_{A_j}(\underline{s})dt+\sigma_{A_j}(\underline{s})dz_{A_j}，j=1,2,...,N， \tag{2}$$

其中 A_j 與 B 分別為市場內可交易風險性資產與無風險性資產價格，$R(\underline{s})$為無風險性資產瞬間預期報酬，$\mu_{A_j}(\underline{s})$與$\sigma_{A_j}(\underline{s})$為風險性資產瞬間預期報酬與波動。

另外本文設定物價指數動態隨機過程$\dot{P}$為

$$\dot{P}=\frac{dP}{P}=\pi_P(\underline{s})dt+\sigma_P(\underline{s})dz_P \ ， \tag{3}$$

其中$\pi_P(\underline{s})$為預期通膨率，亦稱為漂移項 (drift term)，$\sigma_P(\underline{s})$為通膨率散佈項 (diffusion term)，dz_P為通膨率的隨機項，它也可稱為非預期通膨風險。

從上而知 (3) 式的隨機性項目為$\sigma_P(\underline{s})dz_P$，它反映無法被實質投資人預期到的定價因子。從 (3) 式的定義，物價指數變動率也包含著預期通膨率$\pi_P(\underline{s})$，只不過預期通膨率$\pi_P(\underline{s})$在本文中的角色，無法像 Chen et al. (1986) 強調的那樣有很好的訂價效能，進而獨立把它列在迴歸方程式。(3) 式雖包含著預期通膨率與非預期通膨率，但預期通膨率並沒有隨機性質，因此，訂價效果上通膨風險溢酬等價於非預期通膨風險溢酬。

在介紹實質投資人的動態投資機會集合之前，必須先討論實質投資人可交易資產，本文假設市場上存在 $N+1$ 個可交易資產，其動態過程分別如下：

(1) 式與 (2) 式所對應的資產實質報酬為

$$\frac{d\left(\frac{B}{P}\right)}{\frac{B}{P}}=\left[R(\underline{s})-\pi(\underline{s})+\sigma_P^2(\underline{s})\right]dt-\sigma_P(\underline{s})dz_P\text{ ，}\tag{4}$$

$$\frac{d\left(\frac{A_j}{P}\right)}{\frac{A_j}{P}}=\left[\mu_{A_j}(\underline{s})-\pi(\underline{s})-\sigma_{A_jP}(\underline{s})+\sigma_P^2(\underline{s})\right]dt-\sigma_P(\underline{s})dz_P$$
$$+\sigma_{A_j}(\underline{s})dz_{A_j}\text{，}j=1,2,...,N\text{，}\tag{5}$$

其中 A_j/P 與 B/P 定義為資產實質價格，$\left[\mu_{A_j}(\underline{s}),\sigma_{A_j}(\underline{s})\right]$ 與 $\left[\mu_{A_j}(\underline{s})-\pi(\underline{s})-\sigma_{A_jP}(\underline{s})+\sigma_P^2(\underline{s}),\sigma_P,\sigma_{A_j}\right]$ 分別為投資人與實質投資人動態投資機會集合。[3]

若可交易資產種類內存有抗通膨資產，資產實質報酬動態過程設定如下：

$$\frac{db}{b}=r(\underline{s})dt\text{，}\tag{6}$$

其中 $r(\underline{s})$ 為完全規避通膨風險債券資產的瞬間預期實質報酬，(6) 式說明資產之實質報酬不會受到通膨風險影響。[4]

投資機會被 s 個實質狀態變數集合控制，這些動態過程設定為

$$d\underline{s}=\underline{\mu}_s dt+\underline{\underline{\sigma}}_{ss}d\underline{z}_s\text{，}\tag{7}$$

---

[3] 所謂動態，字義上解釋就是影響投資機會集合變化的實質狀態變數集合 $\underline{s}$，s 個實質狀態變數可以動態控制投資機會集合變化，即 $[r(\underline{s}),\mu(\underline{s}),\sigma(\underline{s})]$。

[4] 這個結果顯示，如果市場上可交易債券資產無法完全規避通膨風險變化，則實質報酬內會有通膨風險因子 $\sigma_p dz_p$ 項目，因此(7) 式實質報酬就不會以無風險形式存在。然而，此項資產實質報酬動態方程式，會重新回到 (1) 式或 (2) 式的表示方式。證明請參閱附錄 1。

其中 $\underline{\mu}_s$ 為 $s\times 1$ 實質狀態變數的飄浮項，$\underline{\underline{\sigma}}_{s\times s}$ 為實質狀態變數的 $s\times s$ 散佈項矩陣 (diffusion term matrix)，$d\underline{z}_s$ 為實質狀態變數 $s\times 1$ 向量的標準布朗運動因子。

2.2.2 名目財富預算限制式與實質財富預算限制式

從 Merton (1973) 與 Breeden (1979) 模型得知投資組合名目財富總報酬為

$$\frac{dW^k}{W^k}=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\left(\frac{dA_j}{A_j}-\frac{dB}{B}\right)+\frac{dB}{B}-\frac{C^k}{W^k}dt\ , \tag{8}$$

其中 W^k 是投資人 k 的名目總財富，α_j 為 j 資產投資組合權重，dA_j/A_j 與 dB/B 分別為風險性 j 資產名目報酬與無風險性資產名目報酬，C^k 是投資人 k 的名目財富。接著，定義實質財富與實質消費為，$w^k=W^k/P$ 與 $c^k=C^k/P$，則瞬間實質財富報酬與實質消費的對等關係為[5]

$$\frac{dw^k}{w^k}=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\left(\frac{da_j}{a_j}-\frac{db}{b}\right)+\frac{db}{b}-\frac{c^k}{w^k}dt\ 。 \tag{9}$$

(9) 式為實質投資人把所有資金配置在完全規避通膨債券資產，同時再以多－空投資策略 (long-short strategy) 或者自我融資策略，以賣空抗通膨資產的資金來購買投資組合內 j 資產。從實質報酬角度來看，整體投資組合會因為多－空投資策略內的 j 資產沒有抗通膨效果部位，而有通膨風險的暴露。此與 Campbell and

5 如同 Merton (1973) 與 Breeden (1979) 文章中的定義，名目消費 C^k 與名目財富 W^k 可以解釋為投資人在允許的集合 (admissible sets) 內，選取自己想要的名目消費與投資組合報酬。從名目預算關係式成立延伸至實質預算關係式成立的做法，可以避免直接對實質預算限制式進行設定時，產生不合理等式。也就是說，從名目預算關係式推導出的實質預算限制式，可確保限制式中的投資組合以及實質消費是在可允許集合之內。

Viceira (2001) 的論述相同，因為他們認為即使投資人持有完全分散的投資組合 (well-diversified portfolios)，非預期的通膨風險還是會影響投資組合的報酬。

下一小節引進目標效用函數，就目標效用函數與實質財富預算限制式之連動關係，說明實質投資人在效用極大化下的實質消費與投資組合行為。

2.2.3 實質投資人的目標效用函數

本文對於實質投資人目標效用函數型態，主要是遵循 Liu (2007) 的模型設定，並修改 Liu (2007) 目標效用函數中的名目消費與名目財富，重新設定為未來實質消費與實質遺產財富二種效用函數的線性加總

$$J^k(w^k,\underline{s},t)=\max_{c,\underline{\alpha}^T}\mathrm{E}_t\Big\{\varepsilon\int_t^T e^{-\rho(x-t)}U^k(c,x)dx+(1-\varepsilon)e^{-\rho(T-t)}B^k\left[w^k(T),\underline{s},T'\right]\Big\},$$

$$\text{s.t.}\quad \frac{dw^k}{w^k}=\left\{\underline{\alpha}^T\left[\underline{\mu}_a(\underline{s})-r(\underline{s})\underline{1}\right]+r(\underline{s})\right\}dt+\underline{\alpha}^T\underline{\underline{\sigma}}_{N\times N}\,\underline{dz}_{N\times 1}-\frac{c^k}{w^k}dt\text{，}\qquad(10)$$

其中 T' 是投資人的投資期間，E 是在時間 t 下條件期望值運算元，c 是實質投資人的實質消費能力。$\underline{\alpha}^T$ 是實質投資人在進行資產配置時，配置在各風險性資產上的權重向量。$\underline{\mu}_a$ 則是各風險性資產的實質預期報酬率向量，$\underline{\underline{\sigma}}_{N\times N}$ 為單位風險散佈項，$\underline{dz}_{N\times 1}$ 為 $N\times 1$ $\left[\left(dz_{A_1}-dz_P\right),\cdots,\left(dz_{A_N}-dz_P\right)\right]'$ 風險因子向量。參數 ε 代表的是未來總合實質消費與到期時的總實質財富（或遺產）之間的相對重要性。當參數 ε 為零時，實質投資人只關心實質財富或是到期時的總

實質財富，這種投資人效用型態與 Brennan and Xia (2002) 及 Munk et al. (2004) 等學者模型中的設定一樣。實質投資人的投資行為，在效用極大化引導之下 (10) 式可用等價的哈密頓－雅可比－貝爾曼 (Hamilton-Jacobi-Bellman, HJB) 型態，呈現出來

$$
\begin{aligned}
0 = \max_{c,\underline{\alpha}^T} \Big\{ & \varepsilon e^{-\rho t} U(c,t) + J_t + J_w^k w \left[\underline{\alpha}^T \left[\underline{\mu}_a(\underline{s}) - r(\underline{s})\underline{1} \right] + r(\underline{s}) - \frac{c}{w} \right] \\
& + J_{\underline{s}}^T \mu_{\underline{s}} + \frac{1}{2} J_{ww} w^2 \underline{\alpha}^T \underline{\underline{V}}_{aa} \underline{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} J_{s_i s_j} \sigma_{s_i} \sigma_{s_j} \rho_{s_i s_j} \\
& + w^k \underline{\alpha}^T \underline{\underline{V}}_{as} J_{\underline{ws}} \Big\},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

其中 $\underline{\underline{V}}_{aa}$ 是 $N \times N$ 實質報酬的共變異矩陣，$\underline{\underline{V}}_{as}$ 是 N 個實質報酬與 s 個狀態變數的共變異數矩陣，$\rho_{s_i s_j}$ 為實質狀態變數間的相關係數值。J_w^k、J_{ww}、$J_{s_i s_j}$、$J_{\underline{ws}}$ 與 $J_{\underline{s}}^T$ 分別是間接效用函數 J 的一次或二次偏微分函數。[6] 實質投資人 k 目標，就是在預算限制下，選擇最適實質消費 c 與權重 $\underline{\alpha}$，以極大化可分離相加的馮紐曼－摩根史坦預期實質效用。

3. 實質經濟體系下的共同基金定理與均衡資產價格

本節推導最適投資組合、共同基金定理，及實質均衡下的資產價格，另外，我們也反向推導消費成長的決定性因素，與名目價格及風險因子之間訂價關係。

[6] (10) 式與 (11) 式之間的轉換關係，除了可以參閱原先 Liu (2007) 的文章所提供的求解方法外，Fleming and Soner (2006) 的第三章也提供此類模型的解法。

3.1 消費成長、資產配置，及共同基金定理

3.1.1 名目消費的干擾因子

在一階最適條件下，實質消費等式為

$$\varepsilon e^{-\rho t} U_c = J_w \text{。} \tag{12}$$

藉由 (10) 式利用反函數定理，可推得實質投資人的名目消費

$$C = P \times U_c^{-1}\left[\frac{1}{\varepsilon e^{-\rho t}} J_w(w, \underline{s}, t)\right] \text{，} \tag{13}$$

其中 U_c^{-1} 是邊際效用反函數，(13) 式內名目消費受物價指數 P 、相對重要性 ε 、時間偏好率 ρ ，及間接邊際效用函數 J_w 變化影響。(13) 式可以解釋為實質投資人為了維持消費效用水準，會設法使其實質購買力免於通膨風險的影響，因此，通膨風險的出現，在其他干擾因子不變情況之下，實質投資人就會增加消費，若在高通膨風險期間，實質投資人若不增加其消費，則其實質購買力就會下降，進而效用也會降低。

3.1.2 名目消費成長動態過程

在探討完影響消費行為的因子後，接下來，我們將 (13) 式所隱含著消費成長動態過程擴展成

$$\frac{dC}{C} = \frac{dP}{P} - T_c^k \frac{dU_c}{U_c} - \frac{T_c^{k^2}}{2}\frac{U_{ccc}}{U_{cc}}\left(\frac{dU_c}{U_c}\right)^2 - T_c^k \frac{P}{C}\frac{dPdU_c}{PU_c} \text{，} \tag{14}$$

其中 $T_c^k = -U_c / U_{cc}$ 是投資人的絕對風險容忍係數。實質投資人消費成長中的隨機因子是由通膨風險因子 dP/P 與邊際效用變化率 dU_c/U_c 共同決定。另 (14) 式也能看出 dP/P 受消費成長、邊際效用變化率影響，有別於 Stulz (1986) 貨幣需求理論。

3.1.3 實質投資人投資組合權重

接下來(11)式內 $\underline{\alpha}$ 做一階微分處理，求得們投資組合權重

$$\underline{\alpha}=-\frac{J_{w}^{k}}{w^{k}J_{ww}^{k}}\underline{\underline{V}}_{aa}^{-1}(\underline{\mu}_{a}-r\underline{1})-\frac{\underline{\underline{V}}_{aa}^{-1}\underline{\underline{V}}_{as}J_{\underline{ws}}^{k}}{w^{k}J_{ww}^{k}}\ , \tag{15}$$

此處投資組合權重向量 $\underline{\alpha}$ ，是由相對風險容忍程度($-J_{w}^{k}\big/w^{k}J_{ww}^{k}$ 與 $-J_{\underline{ws}}^{k}\big/w^{k}J_{ww}^{k}$)、實質超額報酬($\underline{\mu}_{a}-r\underline{1}$)，及共變異數矩陣 ($\underline{\underline{V}}_{aa}^{-1},\underline{\underline{V}}_{as}$) 所決定。(15) 式內的權重與資產組成，不同於 Breeden (1979) 所提。差異之一為 $\underline{\alpha}$ 內的 $\underline{\underline{V}}_{aa}^{-1}\underline{\underline{V}}_{as}$ ，並不等同於 Breeden (1979) 的 $\underline{\underline{V}}_{AA}^{-1}\underline{\underline{V}}_{AS}$ 。差異之二為抗通膨風險債券資產，取代無風險性資產。

(15) 式中第一個投資組合要素是市場投資組合，第二個投資組合要素是 S 個規避實質狀態變數影響投資機會集合變動之避險共同基金。最後一個要素是完全規避通膨風險的債券資產，這些共同基金的組成比例分別為 w_m 、 $\underline{\underline{V}}_{aa}^{-1}\underline{\underline{V}}_{as}\Big/\underline{1}^{T}\underline{\underline{V}}_{aa}^{-1}\underline{\underline{V}}_{as}$ 與 1。值得一提的是在狀態變數影響投資機會的部份，Munk et al. (2004) 只以 S=3 個狀態變數代表，來探討投資機會集合變動的來源，這些變數分別為隨機利率、隨機超額報酬以及預期通膨風險因子。若市場上不存在完全規避通膨風險債券資產的話，S+3 共同基金分別是市場投資組合、規避投資機會集合變動的 S 個共同基金、規避通膨風險共同基金，及無風險性資產，而 S+2 共同基金定理與 S+3 共同基金定理在完美市場中的避險效果是等價的。

應用上，若把本文 S 個影響投資機會集合的狀態變數縮減至 2 個，則本文的命題與 Munk et al. (2004) 的共同基金定理命題是可以等價地互換。抗通膨資產功能應可替代掉 Munk et al. (2004) 內的無風險性資產與可規避非預期通膨風險共同基金等兩項資產。由

此可知，在市場存有摩擦性交易成本的情況下，Munk et al. (2004) 命題將被本文命題所取代。因為相同的避險效果，投資人成本考量下共同基金數越少越好。因此，完全規避通膨債券資產的存在，可以降低共同基金數與交易成本，這也是美國債券市場中 TIPS 資產存在的重要原因之一。

從上之推論可以推得下列之命題：

[命題 1] 如果實質投資人評價第 j 項資產的實質價格為 A_j/P，且現有可交易資產中存在著完全規避通膨風險債券資產，我們可以得到 S+2 共同基金定理。否則，S+3 共同基金定理成立。[7]

3.2 實質條件下的均衡資本資產定價模型

在探討均衡資產價格之前，必先建立市場均衡條件，本文定義均衡條件為，市場總財富等於所有實質投資人所擁有個別財富之加總，且市場內個別可交易資產的總值，也必須等於所有實質投資人對於該項資產的需求之加總。

上述均衡概念，可以表示成下式

$$\underline{\alpha}_M M = \sum_{k=1}^{N} \underline{\alpha} W^k \text{ ，} \tag{16}$$

其中 M 為市場總財富，而 $\underline{\alpha}_M$ 為個別可交易資產財富佔總財富的比例。

(16) 式描述了每位實質投資人名目財富的分配狀況。接著，我們將物價指數 P 導入 (16) 式可得到

$$\underline{\alpha}_M \frac{M}{P} = \sum_{k=1}^{N} \underline{\alpha} \frac{W^k}{P} \text{ 。} \tag{17}$$

---

7 證明請參閱附錄 2。

把市場名目總財富轉換成市場實質總財富，(17) 式又可重寫成

$$\underline{\alpha}_M m = \sum_{k=1}^{N} \underline{\alpha} w^k \quad , \tag{18}$$

其中 $m = M/P$ 與 $w^k = W^k/P$ 分別是市場實質總財富與投資人 k 的實質財富。接著，我們利用此均衡條件，推導實質資本資產訂價模型與實質消費資本資產訂價模型。

3.2.1 實質跨期資本資產訂價模型

我們直接利用 Merton (1973) 的解題技巧，求出實質均衡資產訂價模式

$$(\underline{\mu}_a - r\underline{1}) = \frac{\underline{\beta}_{am} - \underline{\beta}_{as}\underline{\beta}_{sm}}{1-\rho_{sm}^2}(\mu_m - r) + \frac{\underline{\beta}_{as} - \underline{\beta}_{am}\underline{\beta}_{ms}}{1-\rho_{sm}^2}(\underline{\mu}_s - r\underline{1}) \text{，} \tag{19}$$

其中 $\underline{\beta}_{am}$ 為資產實質報酬對應於市場投資組合實質報酬的系統性風險因子，而 $\underline{\beta}_{as}$ 為資產實質報酬對應於實質狀態變數的系統性風險因子，$\underline{\beta}_{sm}$ 為間接性的狀態風險因子，ρ_{sm}^2 為實質狀態變數與市場實質財富間的相關係數。[8] 接著，藉由 Ito’s 輔助定理，把實質價格 $a_j = A_j/P$ 轉換成以名目資產價格為基礎的訂價方程式

$$\begin{aligned}\underline{\mu}_A - (r+\pi)\underline{1} = -\sigma_P^2\underline{1} + \underline{\beta}_{AP}\sigma_P^2 + \frac{\underline{\beta}_{am} - \underline{\beta}_{as}\underline{\beta}_{sm}}{1-\rho_{sm}^2}(\mu_m - r) \\ + \frac{\underline{\beta}_{as} - \underline{\beta}_{am}\underline{\beta}_{ms}}{1-\rho_{sm}^2}(\underline{\mu}_s - r\underline{1}) \text{。}\end{aligned} \tag{20}$$

在 (20) 式內，第一個項目是通膨風險對名目報酬的誤差調整項，第二個項目為通膨風險溢酬 $\underline{\beta}_{AP}\sigma_P^2$，第三個與第四個分別是承受市場

---

[8] 如同 Merton (1973) 的結果，在跨期投資－消費決策中，影響實質報酬的風險性因子不再只是單一市場風險因子。

實質風險與實質狀態變數風險所獲得的風險溢酬。(20) 式內的通膨風險 $\underline{\beta}_{AP}$ 會透過投資人實質財富變化來影響資產價格，這項結果與 Merton (1973) 及 Breeden (1979) 的觀點並不一致。他們認為通膨風險訂價因子是狀態變數之一，直接影響到的是投資機會集合變化進而才影響資產的實質報酬。綜合來說，我們可以發現一個事實，即投資人資產配置過程中持有完全規避通膨風險資產，投資組合只能規避掉部份的非預期通膨風險，因此，剩餘的沒有被規避掉的非預期通膨風險必須加以訂價。

3.2.2 實質消費資本資產訂價模型

Breeden (1979) 的 CCAPM 建立在市場重要狀態變數均反應在消費成長上，同理，本文也先認定實質財富與實質狀態變數會反應在實質投資人的實質消費行為上，$dc^k = c_w^k dw + c_{\underline{s}}^k d\underline{s} + [.]dt$，其中 c_w 與 $c_{\underline{s}}$ 分別是實質消費函數對實質財富 w 與狀態變數 s 的偏微分，而 $[.]$ 是 Ito's 輔助定理下的關於時間項的集合。因此，我們可以導出任何資產的實質風險溢酬是實質投資人風險趨避程度與實質消費成長風險的乘積值

$$(\underline{\mu}_a - r\underline{1}) = \frac{c^k \underline{\underline{V}}_{a \ln c^k}}{T_c^k} = \gamma_c^k \underline{\underline{V}}_{a \ln c^k}\ , \tag{21}$$

其中 $T_c^k = -U_c^k / U_{cc}^k$ 及 $\gamma_c^k = -c^k U_{cc}^k / U_c^k$ 分別是實質投資人絕對風險容忍程度以及相對風險趨避程度。(21) 式說明實質超額報酬等於實質趨避係數與實質消費風險之乘積，雖與 Breeden (1979) 表達方式類似，但二者之間實質意義仍有些差異。另外從 $c^k = C^k / P$ 以及 $dc^k = c_w^k dw + c_{\underline{s}}^k d\underline{s} + [.]dt$ 二式合併來看，展開後 dP/P 的動態過程決定於消費成長、市場財富、實質狀態變數以及時間相關的非隨機項。若把名目無風險性資產用實質報酬表示，它會等於完全規避通

膨風險債券資產的預期報酬、通膨風險誤差調整項及消費成長通膨風險溢酬等三項的加總

若 $\gamma_c^k \sigma_{P\ln c^k} = -\sigma_{P\ln U_c^k} = 0$，則 $R = r + \pi - \sigma_P^2$。 (22)

若 $\gamma_c^k \sigma_{P\ln c^k} = -\sigma_{P\ln U_c^k} \neq 0$，則 $R = r + \pi - \sigma_P^2 - \gamma_c^k \sigma_{P\ln c^k} (= -\sigma_{P\ln U_c^k})$。(23)

(22) 式與 (23) 式說明無風險性資產與抗通膨風險資產的對價關係，意味著市場上無風險名目資產，在均衡時被實質消費成長風險因子影響。(23) 式內的等式左邊為無風險性資產預期報酬 R ，它會等於抗通膨債券資產預期報酬項目 ($r + \pi$)，通膨風險的誤差調整項 $(-\sigma_P^2)$ ，及投資人的相對風險趨避係數 (γ_c^k) 與實質消費成長風險 $(-\sigma_{P\ln c^k})$ 的相乘項等三項加總。

比較解釋上，本文的推導結果還是與下列的文獻有些許差別性。Cox et al. (1985b) 提供資產報酬的組成要素是由一些狀態因子以及期間結構所決定。Stulz (1986) 直接從實質貨幣需求觀點出發，解釋影響物價波動的貨幣需求也會是決定名目利率的關鍵因子。Brennan and Xia (2002) 利用定價核也發現無險資產的組成因素與通膨有關，其組成為實質利率、預期通膨率以及預期通膨風險溢酬、交易資產的風險溢酬以及非預期通膨風險溢酬。Bakshi and Chen (1996) 在 Stulz (1986) 的架構上加上期間結構因素，以完備化資產報酬的決定性因素。雖然 Stulz (1986)、Bakshi and Chen (1996)、Brennan and Xia (2002) 皆有提供物價變化與資產報酬的實質關係，但這層關係並非從實質消費變化觀點而來。

[命題 2] **假設市場上有交易完全規避通膨風險債券資產時，風險性資產價格的預期風險溢酬，$\left[\underline{\mu}_A - (r+\pi)\underline{1}\right]$，會等於通膨風險調整項 $(-\sigma_P^2)$ 、相對風險趨避程度與基本實質消費成長風險乘積項 $(-\gamma_c^k \sigma_{P\ln c^k})$ 、通膨風險溢酬，及消費成長風險溢酬的加總。在實質經濟環境中，實質投資人是以完全規避**

通膨債券資產作為市場內可交易資產的評價基礎，這些資產也包括無風險名目資產，所以，當市場有交易抗通膨風險資產時，無風險名目資產價格不再是固定不變，這個概念意味著除了無風險資產外，我們也可以使用抗通膨風險資產，作為其他資產的評價基礎。

命題 2 可表示成

$$\underline{\mu}_A - (r+\pi)\underline{1} = \left(-\sigma_P^2 - \gamma_c^k \sigma_{P\ln c^k}\right)\underline{1} + (1-\gamma_c^k)\underline{\sigma}_{A\ln P} + \gamma_c^k \underline{\sigma}_{A\ln C^k} \text{。} \tag{24}$$

(24) 式是以完全規避通膨風險資產的預期報酬 $r+\pi$ ，做為計算基礎的資產訂價模型，為了與 Stulz (1986) 命題做比較之差異性，我們將 (24) 式轉換成以無風險性資產報酬（R）表示的訂價式子 [9]

$$(\underline{\mu}_A - R\underline{1}) = (1-\gamma_c^k)\underline{\sigma}_{A\ln P} + \gamma_c^k \underline{\sigma}_{A\ln C^k} \text{。} \tag{25}$$

相較於 Breeden (1979) 訂價等式，(25) 式多了通膨風險溢酬這一項。除此，(25) 式是與 Stulz (1986) 以及 Bakshi and Chen (1996) 等發現的一致。Stulz (1986) 以及 Bakshi and Chen (1996) 解釋上是因為投資人會把貨幣需求做為資產配置時的一項資產，所以投資人的貨幣需求量變化就會造成物價指數變化，進而影響到公司資產的實質價格。不同於 Stulz (1986)與 Bakshi and Chen (1996) 的看法，由於實質投資人擔心通膨風險會影響到未來實質購買能力，所以，在評價的過程中，投資人會預先考量實質效果，以避免未來的實質購買力受損，因此，實質購買力風險會事先反應在公司資產報酬上，形成通膨風險、消費，與資產價格對價關係。

本文再深入分析其他影響權益風險溢酬變化之相關因素，當實質投資人的相對風險趨避程度 γ_c^k 大於 1 時，厭惡實質購買力受影響的投資人，就會願意接受較小的通膨風險溢酬。倘若相對風險趨

9 證明請參閱 Stulz (1986) 以及 Bakshi and Chen (1996)。

避程度 γ_c^k 等於 1，通膨風險因子不會產生任何實質的訂價效果，此結果與 Munk et al. (2004) 推論一致。[10] 說明完影響權益風險溢酬變化的相關因素後，接下來，我們運用市場均衡條件，推導實質經濟體系下二因子消費資本資產均衡訂價模型，我們可以得到下列二個命題。

[命題 3] 市場均衡時，風險性資產與完全規避通膨風險資產間的權益風險溢酬變化，$\left[\underline{\mu}_A-(r+\pi)\underline{1}\right]$，視通膨風險因子 $\left(-\underline{\sigma}_{A\ln P}\right)$ 與總消費成長風險因子 $\left(\underline{\sigma}_{A\ln C^m}\right)$ 而定。[11]

命題 3 可表示成

$$
\begin{aligned}
\underline{\mu}_A-(r+\pi)\underline{1} &= \left(\sigma_P^2-\frac{K\sigma_P^2-\sigma_{\ln P\ln C^m}}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\right)\underline{1} \\
&+\left(-\underline{\sigma}_{A\ln P}\quad \underline{\sigma}_{A\ln C^m}\right)\begin{pmatrix}-\sigma_P^2 & \sigma_{\ln P\ln C^m}\\ -\sigma_{\ln C^m\ln P} & \sigma_{C^m}^2\end{pmatrix}^{-1} \\
&\times\begin{pmatrix}\mu_P-\left(r+\pi-\sigma_P^2+\dfrac{K\sigma_P^2-\sigma_{\ln P\ln C^m}}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\right)\\ \mu_{C^m}-\left(r+\pi-\sigma_P^2+\dfrac{K\sigma_P^2-\sigma_{\ln P\ln C^m}}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\right)\end{pmatrix}。 \qquad (26)
\end{aligned}
$$

[10] 雖然費雪效果一般都會出現在評價模型之中，使得通膨風險成為訂價因子，但在 γ_c^k 等於 1 這個特例，通膨風險溢酬並不會反應在訂價方程式上，而且當 $\gamma_c^k\to 1$ 時，權益風險溢酬會轉移到消費成長風險上。

[11] 證明請參閱附錄 3。

[命題 4] 市場均衡時，風險性資產相較於無風險性資產的風險溢酬 $\left(\underline{\mu}_A - R\underline{1}\right)$，視通膨風險因子 $\left(\underline{\sigma}_{A\ln P}\right)$ 與總消費成長風險因子 $\left(\underline{\sigma}_{A\ln C^m}\right)$ 而定。[12]

命題 4 可表示成

$$\underline{\mu}_A - R\underline{1} = \left(\underline{\sigma}_{A\ln C^m} \quad \underline{\sigma}_{A\ln P}\right) \times \begin{pmatrix} \sigma_{\ln P\ln C^m} & \sigma_P^2 \\ \sigma_{C^m}^2 & \sigma_{\ln C^m \ln P} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_P - R \\ \mu_{C^m} - R \end{pmatrix} 。 \tag{27}$$

(26) 式建立在完全規避通膨風險資產評價基礎上，而(27) 式則是建立在無風險資產評價基礎上，所以，二種評價模型皆可以評價市場內任何可交易資產。命題 3 與命題 4 顯示，風險性資產預期風險溢酬變化，與通膨風險因子 $\left(\underline{\sigma}_{A\ln P}\right)$ 及總消費成長風險因子 $\left(\underline{\sigma}_{A\ln C^m}\right)$ 兩者有關。

綜合 (18) 式、(24) 式及 (25) 式的模型結果來看，在 real ICAPM 或 real CCAPM 模型內，市場均衡時，通膨風險因子是一個訂價因子，這項結果與 ICAPM 或 CCAPM 的結果並不完全一致，ICAPM 認為物價變化是屬狀態變數，且會透過投資機會集合變動出現在訂價方程式，而 CCAPM 則認為物價風險會反應在消費成長中，並不會出現在訂價方程式。

4. 實證方法與結果

前一節推導出 real CCAPM，本節接著使用美國資本市場相關資料，驗證模型的訂價績效。

[12] 證明請參閱附錄 4。

4.1 資料來源與研究期間

探討 CCAPM 的實證文獻，諸如：Chu (2006)、Yogo (2006)、及 Jagannathan and Wang (2007)，大抵都採用 Fama and French (1992, 1993) 這兩位學者依規模因子 (*Size*) 與價值成長因子 (*B/M*) 兩個構面分類且市值加權，所編製的 5×5 之 25 個投資組合為研究樣本。至於將運用在穩健測試之其他投資組合報酬，皆從 French 的個人網站上下載。[13] 另外，實證研究所需的總體經濟變數資料，包括非耐久財消費支出、實質非耐久財消費支出與服務支出、計算通膨率的消費者物價指數 (consumer price index, CPI)、耐久財消費支出、預期通膨率（由密西根大學提供），期間結構因子及違約風險因子，皆從 Datastream 資料庫下載。[14] 本文用到一些時間數序因子在 1978 年前沒有資料且計算數值需用到前期或驗證時需用到落後一期，因此，為了配合實證資料的可利用性，本文編撰期間是從 1978 年 3 月起至 2005 年 12 月止，共計 334 筆月資料。

4.2 代理變數與資料特性

4.2.1 消費成長代理變數

由於過去理論文獻指出消費成長風險是可定價投資組合報酬，不過在實證上的結果往往卻很難找到顯著性。探討後，有一部份的實證學者歸究是消費的替代變數選取上，出了問題，詳細討論請參閱 Hall (1978)、Breeden et al. (1989)、Parker and Julliard (2005)、Yogo (2006)、Jagannathan and Wang (2007)、Julliard (2007) 等文章內容。

Malloy et al. (2009) 認為非耐久財消費支出應該因應實際狀況與模型的需要，選取一些特殊敏感的服務支出來做搭配，始能找到

---

[13] 請參閱 French 個人網站，http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html。

[14] 請參閱 U.S. Bureau of Economic Analysis 網站，http://www.bea.gov/national/。

消費成長風險的顯著性。Lustig and van Nieuwerburgh (2005) 認為檢定 CCAPM 時必須要把房屋支出變化視為一個敏感性因子。同樣地，Lettau and Ludvigson (2001a) 研究發現消費-財富比在每季報酬變化上出現很強的預期功能。這個變數在中短期的預測皆比著名的預測變數來得好，包括股利率、股利支付率。

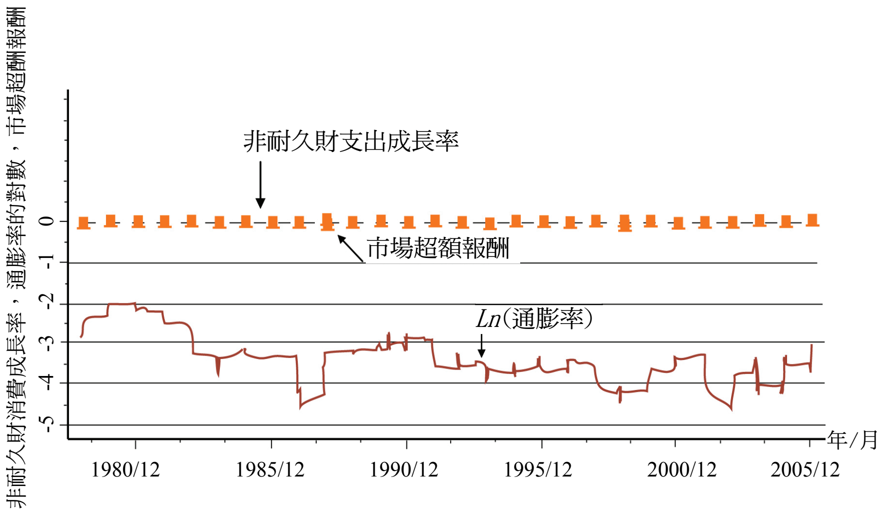
4.2.2 通膨率代理變數與資料特性

傳統上，通膨率的計算方式為第 t 期消費者物價指數/第 t-1 期消費者物價指數後再扣除一，本文藉用它來做為時序上的代理變數。我們發現通膨率存在單根與非定態特性，這個問題若不控制將造成虛假迴歸現象。於是，再就此變數取對數函數，亦即 *Ln*（通膨率）。結果，從 DF-GLS 和 KPSS 的檢定量觀察，在 1% 顯著水準下 *Ln*（通膨率）是沒有單根效應且為穩定時間數列。[15] 由於對數函數是屬於單調函數，並不影響我們預測方向與其意涵，但可能影響到解釋力，不過，此方法比差分方式更可以留住更多原先資料的訊息。另外，在 1% 顯著水準下非耐久財消費成長率與市場超額報酬，我們也檢定出沒有單根效應且為穩定時間數列，如下圖 1。

圖 1 內虛線為非耐久財消費成長率、實線為 *Ln*（通膨率）、三角形代表的是市場超額報酬（以美國股市資料庫 (center for research in security prices, CRSP) 市值加權平均指數 (CRSP value-weighted index) 代理市場投資組合，三個月到期的美國國庫券代理無風險資產），大致可以看出這三個變數時間數列走勢水平穩定，檢定的結果也是如此。圖 1 說明在 1978 年 3 月至 2005 年 12 月這段期間各個主要解釋變數的變化情況。

---

[15] Elliott et al. (1996) 亦提出對自我迴歸單根 (autoregressive unit root) 的效率檢定。此檢定稱之為 DF-GLS 單根檢定，此方法不論在 size 或 power 上均有良好的表現。Kwiatkowski et al. (1992) 為了修正 ADF 與 PP 檢定在統計上的缺點，他們根據 Phillips and Perron (1988) 提出修正的 LM 檢定統計量，稱之為 KPSS 單根檢定法。



資料來源：Datastream 資料庫與 French 個人網站。

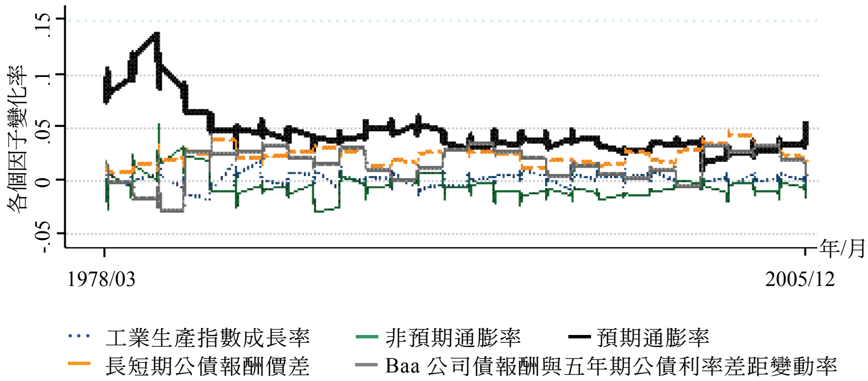
圖 1　美國主要解釋變數的時間序列

4.2.3 其他時序資料特性

基本上，為了實證結果能更加穩健，根據 Chen et al. (1986) 提出的總體經濟因素訂價觀點，本文再選取五因子（依次為工業生產指數變動率、未預期通膨率、預期通膨率、違約風險因子、利率期間結構因子指標），[16] 做為被檢定資產的解釋變數。這些總體變數要在 1% 顯著水準下沒有單根效應以及符合穩定的性質。圖 2 說明在 1978 年 3 月至 2005 年 12 月這段期間 Chen et al. (1986) 五因子的變化情況。

上述五因子中的工業生產總指數成長率定義為第 t 期工業生產總指數／第 t-1 期工業生產總指數再扣除一。非預期通膨率定義為當期通膨率扣除當期預期通膨率，而預期通膨率為投資人對未來通膨率的預期，此數值是由密西根大學計算，並收錄在 Datastream 資

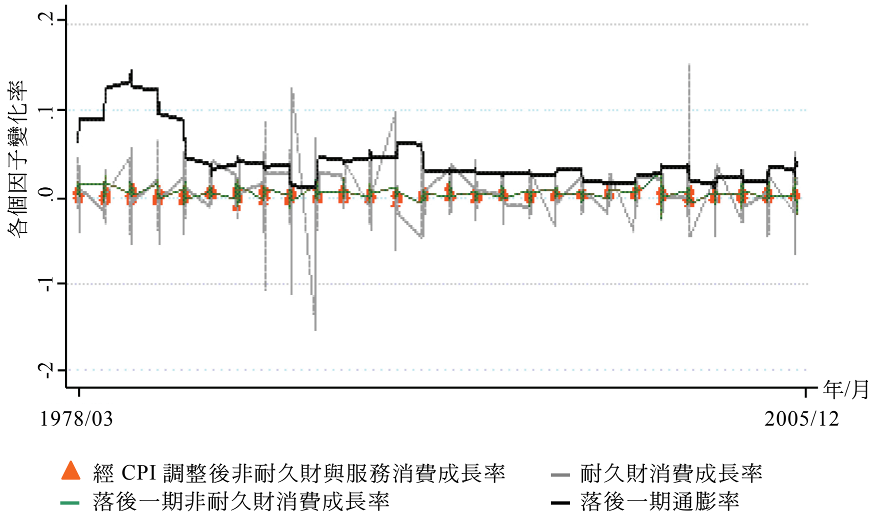
[16] 理論基礎請參閱 Ross (1976)。



資料來源：同圖 1。

圖 2　美國 CRR 五因子的時間序列

料庫。Lettau and Ludvigson (2001b) 對於時序上違約風險因子的計算，是由不及投資級 (Baa) 等級以下的公司債報酬與最高投資等級 (Aaa) 等級的公司債報酬差距取得，然而 Chen et al. (1986) 則是以 Baa 等級以下的公司債報酬扣除長年期政府公債利率來做為替代變數，而本文計算方式是參照 Chen et al. (1986) 之建議，把五年期政府公債利率來做為長年期政府公債利率替代變數，並計算之。依 Lettau and Ludvigson (2001b) 之做法，期間結構價差因子由十年期國庫債利率和三個月國庫債利率差距替代。同時，我們也選取不同定義的控制變數，例如實質非耐久財與服務支出成長率、耐久財消費成長率，以及落後期消費成長率與落後期通膨率，檢測後，並沒有單根效應或者發散效果，如下圖 3。圖 3 說明在 1978 年 3 月至 2005 年 12 月這段期間經 CPI 調整過的實質消費成長率、耐久財消費成長率、落後期消費成長率與落後期通膨率的變化情況。



資料來源：同圖 1。

圖 3　美國相關控制變數的時間序列

4.3 實證方法與實證模型

4.3.1 實證方法

本文使用 Fama and MacBeth (1973) 二階段迴歸檢定方法，檢定本文所推導的訂價模型。[17] 在第一階段分析過程中，使用所取得的月報酬資料做為應變數，以非耐久財消費成長率與 *Ln*（通膨率）作為解釋變數，進行迴歸分析，並得到各個訂價因子迴歸估計貝它值。接著，在第二階段迴歸中，利用各個已知貝它值與平均報酬，再進行一次迴歸分析，以產生風險溢酬係數。另外，我們也依照 Chu (2006) 以及 Jagannathan and Wang (2007) 的做法，並無列入無險資產的訂價績效。受限於篇幅，只簡列重要式子來做介紹：

[17] 請參閱 Cochrane (2001)。

(1) 消費資本資產訂價模型 (Breeden (1979), CCAPM)

$$\mathrm{E}[R_i]=R_f+\lambda_{CG}\beta_{i,CG},\ i=1,...,25\ ，$$

其中 E[R_i] 代表投資組合 i 的預期報酬率，R_f 代表無風險資產報酬率，$\beta_{i,CG}$ 與 λ_{CG} 分別為消費成長風險貝它值與消費成長風險溢酬係數。

(2) 單一通膨風險因子資本資產訂價模型

$$\mathrm{E}[R_i]=R_f+\lambda_{IR}\beta_{i,IR},\ i=1,...,25\ ，$$

其中 E[R_i]代表投資組合 i 的預期報酬率，R_f 代表無風險資產報酬率，以美國三個月期的國庫券代理無風險資產，$\beta_{i,IR}$ 與 λ_{IR} 分別為通膨風險貝它值與通膨風險溢酬係數。

(3) 二因子實質資本資產訂價模型

$$\mathrm{E}[R_i]=R_f+\lambda_M\beta_{i,M}+\lambda_{IR}\beta_{i,IR},\ i=1,...,25\ ，$$

其中 E[R_i]代表投資組合 i 的預期報酬率，R_f 代表無風險資產的報酬率，$\beta_{i,M}$ 與 λ_M 分別為投資組合 i 的市場風險貝它值與市場風險溢酬係數，$\beta_{i,IR}$ 與 λ_{IR} 分別為通膨風險貝它值以及通膨風險溢酬係數。

(4) 二因子實質消費成長訂價模型

$$\mathrm{E}[R_i]=R_f+\lambda_{CG}\beta_{i,CG}+\lambda_{IR}\beta_{i,IR},\ i=1,...,25\ ，$$

其中 E[R_i]代表投資組合 i 的預期報酬率，R_f 代表無風險資產的報酬率，$\beta_{i,CG}$ 與 λ_{CG} 分別為消費成長風險貝它值與消費成長風險溢酬係數，而 $\beta_{i,IR}$ 與 λ_{IR} 分別為通膨風險貝它值與通膨風險溢酬係數。

(5) 三因子實質消費成長訂價模型

$$\mathrm{E}[R_i]=R_f+\lambda_{CG}\beta_{i,CG}+\lambda_{UIR}\beta_{i,UIR}+\lambda_{EIR}\beta_{i,EIR},\ i=1,...,25\ ，$$

其中 E[R_i] 代表投資組合 i 的預期報酬率，R_f 代表無風險資產的報酬率，$\beta_{i,CG}$ 與 λ_{CG} 分別為消費成長風險貝它值與消費成長風險溢酬係數，而 $\beta_{i,UIR}$ ($\beta_{i,EIR}$) 與 λ_{UIR} (λ_{EIR}) 分別為非預期通膨風險貝它值（預期通膨風險貝它值）與非預期通膨風險溢酬係數（預期通膨風險溢酬係數）。

4.3.2 貝它值 (β) 誤差估計

Campbell et al. (1997) 認為二階段迴歸中的定價變數為 “共同因子”，估計時易出現貝它值誤差。此時，需用 Shanken (1992) 的方式或最大概似法 (maximum likelihood estimation, MLE) 處理第一階段貝它值誤差估計，以讓第二階段橫斷面的 t 值統計量較為準確。[18] 除此，也可利用 Fama and MacBeth (1973) 方法，於第二階段先是每個月估計一次迴歸：投資組合在當月的報酬做因變數，第一階段估計出的貝它值做自變數，因此每月有一個 λ 估計值，再估計所有月份 λ 的平均值及其標準差來做檢定。[19]

另一個相關問題是代理的解釋變數通常無法完全代表效率投資組合，可能原因是遺漏到部份資產，例如人力資本或是耐久財支出。如果我們全然知道代理變數遺漏了或是多出了那些資產，當然可以修正且重新計算。但是，到底怎麼樣的合成才是真正代表理論模型裡頭的定價因子，因為都會有估計誤差，因此，我們以信賴度來做誤差迴歸檢定 (errors in variables regression)，找出各種信賴度下的訂價誤差，降低虛假迴歸可能性，進而提昇二階段迴歸實證結果的真實性。

4.3.3 基本實證結果

表 1 呈列二個階段的實證結果。表 1 中 panel A 顯示第一階段的時序迴歸後各類投資組合的相對應數據成果，panel B 結果依 panel

---

[18] Jagannathan and Wang (1998) 認為用條件 CAPM 估計，降低誤差值。

[19] 感謝匿名審稿人建議，使本文在實證檢驗上更加完整。

表 1　時序上與橫斷面相關實證結果

panel A		$R_{it}=\alpha_i^{(i)}+\lambda_{it,CG}\beta_{it,CG}$		$R_{it}=\alpha_i^{(ii)}+\lambda_{it,IR}\beta_{it,IR}$		$R_{it}=\alpha_i^{(iii)}+\lambda_{it,CG}\beta_{it,CG}+\lambda_{it,IR}\beta_{it,IR}$			$R_{it}=\alpha_i^{(iv)}+\lambda_{it,UIR}\beta_{it,UIR}+\lambda_{it,EIR}\beta_{it,EIR}$				$R_{it}=\alpha_i^{(v)}+\lambda_{it,M}\beta_{it,M}+\lambda_{it,IR}\beta_{it,IR}$		
投資組合	5×5 投資報酬	$\alpha_i^{(i)}$	$\beta_{i,CG}$	$\alpha_i^{(ii)}$	$\beta_{i,IR}$	$\alpha_i^{(iii)}$	$\beta_{i,CG}$	$\beta_{i,IR}$	$\alpha_i^{(iv)}$	$\beta_{i,CG}$	$\beta_{i,UIR}$	$\beta_{i,EIR}$	$\alpha_i^{(v)}$	$\beta_{i,M}$	$\beta_{i,IR}$
S1B1	0.0067	0.0023	0.9135	0.0349	0.0085	0.0249	0.8230	0.0066	0.0077	0.8840	0.1790	0.0012	0.0369	0.0120	104213
S1B2	0.0146	0.0109	0.7745	0.0293	0.0044	0.0204	0.7362	0.0028	-0.0010	0.8036	0.1257	-0.0040	0.0310	0.0073	1.1567
S1B3	0.0154	0.0128	0.5333	0.0236	0.0025	0.0174	0.5150	0.0013	0.0046	0.5566	0.0467	-0.0027	0.0250	0.0049	0.9786
S1B4	0.0169	0.0149	0.4122	0.0182	0.0004	0.0131	0.4197	-0.0006	-0.0015	0.4631	0.0399	-0.0053	0.0194	0.0025	0.8709
S1B5	0.0172	0.0149	0.4906	0.0163	-0.0003	0.0101	0.5097	-0.0014	-0.0012	0.5461	-0.0338	-0.0050	0.0176	0.0020	0.9025
S2B1	0.0102	0.0070	0.6721	0.0314	0.0064	0.0241	0.6035	0.0050	0.0206	0.6262	0.0158	0.0043	0.0334	0.0099	1.4315
S2B2	0.0130	0.0105	0.5343	0.0331	0.0060	0.0274	0.4664	0.0050	0.0191	0.4993	0.0839	0.0026	0.0346	0.0088	1.1076
S2B3	0.0154	0.0142	0.2512	0.0239	0.0026	0.0212	0.2228	0.0021	0.0166	0.2489	-0.0730	0.0009	0.0253	0.0049	0.9490
S2B4	0.0160	0.0154	0.1355	0.0272	0.0034	0.0261	0.0925	0.0032	0.0212	0.1179	-0.0208	0.0019	0.0285	0.0055	0.8810
S2B5	0.0158	0.0134	0.5083	0.0268	0.0033	0.0210	0.4777	0.0022	0.0112	0.5174	-0.0243	-0.0006	0.0282	0.0057	0.9575
S3B1	0.0112	0.0090	0.4566	0.0260	0.0044	0.0210	0.4083	0.0036	0.0208	0.4184	-0.0056	0.0037	0.0279	0.0078	1.3328
S3B2	0.0139	0.0115	0.4840	0.0274	0.0041	0.0220	0.4421	0.0031	0.0096	0.4849	0.0714	-0.0007	0.0289	0.0067	1.0705
S3B3	0.0135	0.0126	0.1823	0.0235	0.0030	0.0217	0.1460	0.0027	0.0209	0.1616	-0.0814	0.0027	0.0248	0.0052	0.9103
S3B4	0.0141	0.0137	0.0878	0.0202	0.0018	0.0194	0.0650	0.0017	0.0113	0.0958	-0.0015	-0.0008	0.0214	0.0039	0.8415
S3B5	0.0168	0.0157	0.2341	0.0216	0.0014	0.0189	0.2212	0.0010	0.0071	0.2667	-0.0554	-0.0026	0.0229	0.0037	0.9086
S4B1	0.0129	0.0107	0.4652	0.0269	0.0042	0.0218	0.4207	0.0033	0.0202	0.4359	-0.0231	0.0030	0.0287	0.0073	1.2521
S4B2	0.0128	0.0121	0.1414	0.0183	0.0017	0.0168	0.1225	0.0014	0.0157	0.1329	-0.0407	0.0012	0.0198	0.0042	1.0453
S4B3	0.0138	0.0125	0.2646	0.0176	0.0012	0.0145	0.2566	0.0006	0.0072	0.2818	0.0057	-0.0017	0.0190	0.0035	0.9491
S4B4	0.0140	0.0132	0.1655	0.0132	-0.0003	0.0111	0.1741	-0.0006	-0.0006	0.2139	-0.0399	-0.0043	0.0144	0.0018	0.8435
S4B5	0.0147	0.0132	0.3212	0.0233	0.0026	0.0197	0.2950	0.0019	0.0130	0.3249	-0.0390	0.0000	0.0246	0.0048	0.8844
S5B1	0.0112	0.0113	-0.0236	0.0084	-0.0008	0.0085	-0.0125	-0.0008	0.0214	-0.0399	-0.2119	0.0035	0.0098	0.0017	1.0153
S5B2	0.0125	0.0134	-0.1729	0.0120	-0.0001	0.0142	-0.1762	0.0002	0.0293	-0.2089	-0.2056	0.0054	0.0134	0.0023	0.9705
S5B3	0.0117	0.0127	-0.2173	0.0123	0.0002	0.0150	-0.2267	0.0007	0.0261	-0.2460	-0.1919	0.0045	0.0135	0.0023	0.8704
S5B4	0.0119	0.0124	-0.0196	0.0147	0.0008	0.0162	-0.1248	0.0011	0.0347	-0.1620	-0.2600	0.0075	0.0158	0.0027	0.7415
S5B5	0.0123	0.0144	-0.4545	0.0165	0.0013	0.0223	-0.4863	0.0023	0.0246	-0.4795	-0.1061	0.0034	0.0176	0.0032	0.7842

表 1　時序上與橫斷面相關實證結果（續前頁）

panel B										
(i)	λ_{CG}	t 值	P 值	λ_{M}	t 值	P 值	λ_{IR}	t 值	P 值	Adj-R^2
不考量異質性	-0.0002	-0.1000	0.9230							0.0004/-0.0430
考量異質性	-0.0002	-0.0700	0.9420							
	λ_{CG}	Z 值	P >| Z |	λ_{M}	Z 值	P >| Z |	λ_{IR}	Z 值	P >| Z |	
最大概似法	-0.0002	-0.1000	0.9170							
(ii)	λ_{CG}	t 值	P 值	λ_{M}	t 值	P 值	λ_{IR}	t 值	P 值	
不考量異質性							-0.4465	-2.3100	0.0300	0.1887/0.1534
考量異質性							-0.4465	-1.7000	0.1030	
	λ_{CG}	Z 值	P >| Z |	λ_{M}	Z 值	P >| Z |	λ_{IR}	Z 值	P >| Z |	
最大概似法							-0.4465	-2.4100	0.0160	
(iii)	λ_{CG}	t 值	P 值	λ_{M}	t 值	P 值	λ_{IR}	t 值	P 值	
不考量異質性	0.0024	1.6700	0.1090				-0.8219	-3.5200	0.0020	0.3604/0.3023
考量異質性	0.0024	2.1600	0.0420				-0.8219	-0.9600	0.0070	
	λ_{CG}	Z 值	P >| Z |	λ_{M}	Z 值	P >| Z |	λ_{IR}	Z 值	P >| Z |	
最大概似法	0.0024	1.7800	0.0750				-0.8219	-3.7500	<0.0001	
(iv)	λ_{CG}	t 值	P 值	λ_{UIR}	t 值	P 值	λ_{EIR}	t 值	P 值	
不考量異質性	-0.0003	-0.1400	0.8900	-0.0104	-1.6400	0.1160	-0.6332	-5.3100	<0.0001	0.5745/0.5137
考量異質性	-0.0003	-0.1900	0.8520	-0.0104	-1.4400	0.1650	-0.6332	-4.4000	<0.0001	
	λ_{CG}	Z 值	P >| Z |	λ_{UIR}	Z 值	P >| Z |	λ_{EIR}	Z 值	P >| Z |	
最大概似法	-0.0003	-0.1500	0.8780	-0.0104	-107900	0.0730	-0.6332	-5.7900	0.0040	
(v)	λ_{CG}	t 值	P 值	λ_{M}	t 值	P 值	λ_{IR}	t 值	P 值	
不考量異質性				-0.0078	-1.8900	0.0720	0.0345	0.1200	0.9050	0.3323/0.2716
考量異質性				-0.0078	-2.1100	0.0460	0.0345	0.1200	0.9070	
	λ_{CG}	Z 值	P >| Z |	λ_{M}	Z 值	P >| Z |	λ_{IR}	Z 值	P >| Z |	
最大概似法				-0.0078	-2.0200	0.0440	0.0345	0.1300	0.8970	

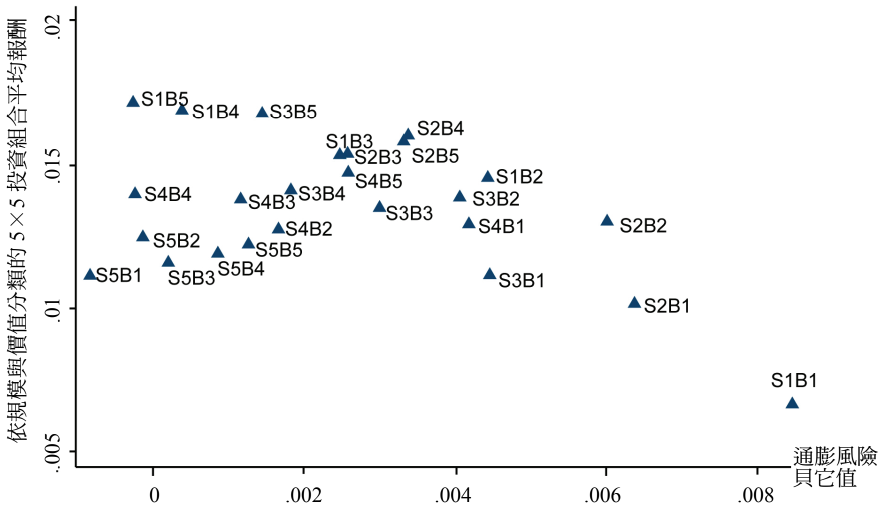
資料來源：本研究整理。

說明：1. 表 1 panel A 呈現第一階段迴歸後每一個投資組合報酬的裁距項與風險數值。$\alpha_i^{(i)}$、$\alpha_i^{(ii)}$、$\alpha_i^{(iii)}$、$\alpha_i^{(iv)}$、$\alpha_i^{(v)}$ 分別為每個投資組合報酬在進行 CCAPM、單一通膨風險模型、實質消費成長模型、三因子實質消費成長模型、二因子實質資本模型時間序列迴歸後的截距項，而 $\beta_{i,CG}$、$\beta_{i,IR}$、$\beta_{i,UIR}$、$\beta_{i,EIR}$ 為各個模型在時序後相對應的貝它風險值。panel B 內容呈現五個基本迴歸關係的實證結果。λ_{CG}、λ_{IR}、λ_{UIR}、λ_{EIR}、λ_{M} 分別為消費成長風險溢酬係數、通膨風險溢酬係數、非預期通膨風險溢酬係數、預期通膨風險溢酬係數、市場貝它風險溢酬係數。

2. 被檢定資產為 5（規模）×5（價值）的 25 個投資組合平均報酬，研究期間從 1978 年 3 月起至 2005 年 12 月止。

A 數據進行迴歸而成，其中 (i)、(ii)、(iii)、(iv) 及 (v) 代表 CCAPM、單一通膨風險模型、real CCAPM、三因子實質消費模型及二因子實質資本資產訂價模型。從 (i) 結果看來，λ_{CG} 係數並不顯著，據此研判消費風險因子訂價績效不好，與以往文獻證據一致。就本研究主要觀點，消費成長風險因子表現不佳，可能需要有其他的條件狀態因子配合，例如：實質投資人佔多數時，即需要多加考慮通膨風險因子，或者是在代理變數估算上有出入，必須多加入服務支出等，才能表現出消費成長風險的訂價能力，相關的可能性，稍後我們會陸續討論。

接著再從 (ii) 的統計數據來看，顯示出調整後的解釋力為 15.34%，λ_{IR} 通膨風險溢酬係數值為 -0.4465，其 P 值為 0.0300，達 5% 顯著水準。圖 4 說明單一通膨風險貝它值與每個類別平均報酬關係；圖 5 為橫斷面迴歸後，殘差值與配適值散佈程度。圖 4 的散佈狀況較圖 4 集中且明顯地呈現向下走勢，在圖 5 也可看出殘差值接近零。這樣的結果指出通膨風險較消費成長風險更能解釋橫斷面報酬。

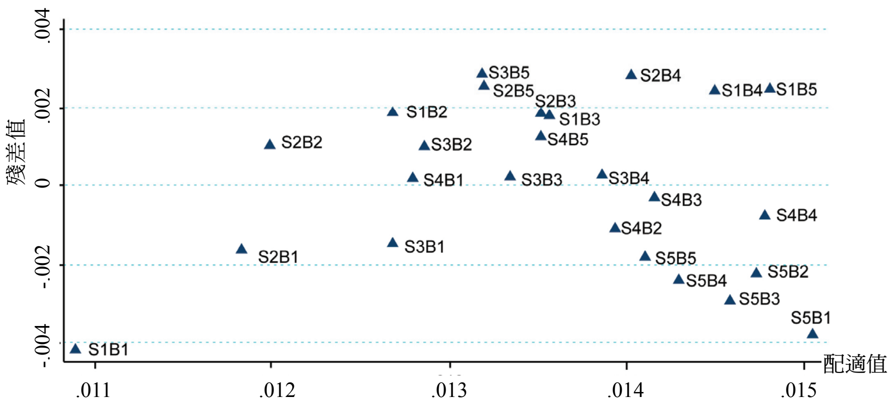


資料來源：同圖 1。

圖 4　美國第一階段後各個分類平均報酬與風險散佈結果

圖 4 表示的是在第一階段迴歸後，截取 5（規模）×5（價值）內的各個投資組合對市場投資組合以及通膨率所反應的風險數據，並再與平均報酬作一整理所描繪出的圖形關係。

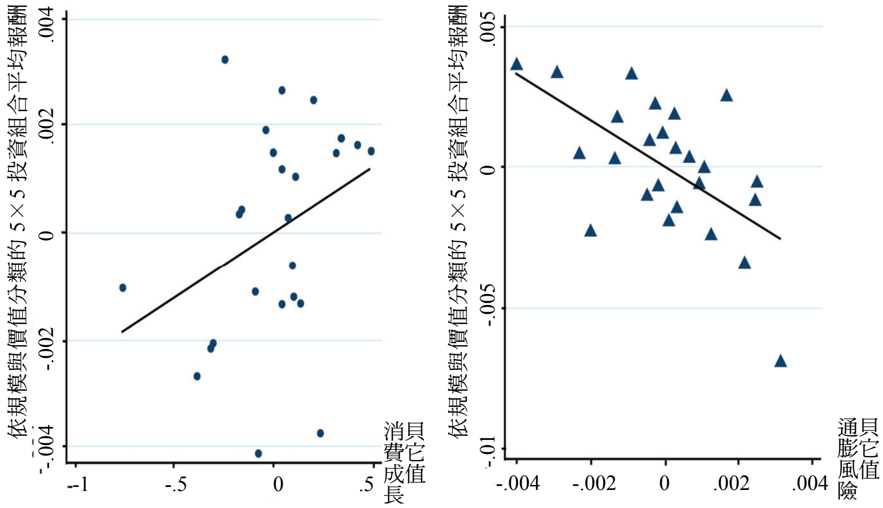
(iii) 實證結果顯示出 λ_{CG} 與 λ_{IR} 分別為接近 10% 以及達 1% 顯著水準且預測方向不變（調整後解釋力為 30.23%，較 (i) 及 (ii) 高），如圖 6 或圖 7。由於實質投資人擔心通膨風險會影響到未來實質購買能力，所以投資人會預先考量實質效果。厭惡實質購買力受影響的投資人就會提高消費成長風險溢酬或是願意接受較小的通膨風險溢酬，使得投資組合實質平均報酬下降。圖 5 表示針對單一通膨風險模型橫斷面迴歸後，殘差值與配適值散佈程度。



資料來源：同圖 1。

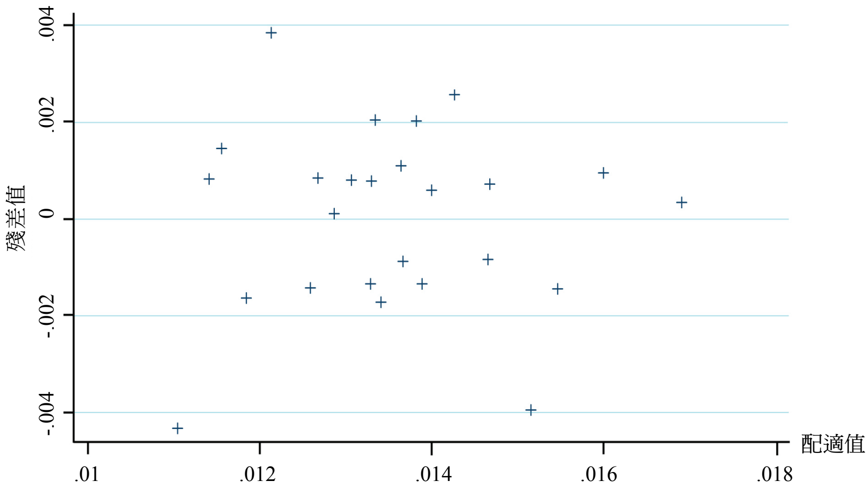
圖 5　美國第二階段後橫斷面殘差值與配適值散佈結果

圖 6 同時考量消費成長風險因子與通膨風險後，分別萃取第一階段後的解釋變數貝它值與 5（規模）×5（價值）的 25 個投資組合平均報酬散佈圖。



資料來源：同圖 1。

圖 6　美國第一階段後各個分類平均報酬與不同風險貝它值散佈結果



資料來源：同圖 1。

圖 7　美國第二階段橫斷面殘差值與配適值散佈結果

圖 7 表示針對二因子實質消費模型橫斷面迴歸後，殘差值與配適值散佈程度。

在 (iv) 之中，調整後解釋力提升至 51.37%，預期通膨風險溢酬係數非常顯著、非預期通膨風險溢酬係數接近邊際顯著，與 (iii) 中預期方向一致。此外 (iv) 說明通膨風險若由非預期通膨與預期通膨風險替代，消費成長因子的訂價效能將與 (i) 類似。(v) 的調整後解釋力為 27.16%，市場貝它風險溢酬係數值為-0.0078，其 P 值為 0.0720，達 10%顯著水準。λ_M 為負的結果，與 Petkova (2006) 及 Jagannathan and Wang (1996) 等實證研究結果一致。λ_{IR} 為 0.0345，其 P 值並未達顯著水準。換言之，通膨風險與資產報酬的橫斷面關係並不成立。這個檢定結果可能是市場超額報酬替代了通膨率來訂價投資組合平均報酬，就如同 Fama and French (1992) 橫斷面的規模風險因子可以代替市場風險因子來訂價資產，並非貝它風險已死。

4.4 模型穩健性測試

為了更清楚瞭解自述定價因子的功能，考慮投資組合報酬率之間的相關性利用 Fama and MacBeth (1973) 方法處理，不受限在代理變數選取，我們把消費更換成 Jagannathan and Wang (2007) 的定義，或者把通膨風險拆解成預期通膨風險與非預期通膨風險；同樣地，在被檢定資產的部份，我們更換成相同因子分類但不同等份、相同等份但不同因子的分類、相同因子分類但等值加權分類，或是以產業分類的投資組合。[20] 除了上述這些特質，貝它值估計誤差性應該被加以討論。於是，我們進行下列幾種穩健性檢定：

---

[20] 考慮內生性問題，檢定後發現消費成長風險係數的 P 值為 0.265 仍不顯著，通膨風險係數 P 值為 0.04，達 5% 顯著，通膨風險因子仍有一定的訂價效果。

表 2　模型穩健性測試：考量各投資組合報酬率相關性

(i)	$\bar{\lambda}_{CG}$	t 值	P 值	$\bar{\lambda}_{M}$	t 值	P 值	$\bar{\lambda}_{IR}$	t 值	P 值
Fama-Macbeth	-0.0003	-0.0524	0.5209						
(ii)	$\bar{\lambda}_{CG}$	t 值	P 值	$\bar{\lambda}_{M}$	t 值	P 值	$\bar{\lambda}_{IR}$	t 值	P 值
Fama-Macbeth							-0.0816	-1.2669	0.1030
(iii)	$\bar{\lambda}_{CG}$	t 值	P 值	$\bar{\lambda}_{M}$	t 值	P 值	$\bar{\lambda}_{IR}$	t 值	P 值
Fama-Macbeth	0.0004	0.8985	0.1848				-0.1500	-3.8246	0.0001
(iv)	$\bar{\lambda}_{CG}$	t 值	P 值	$\bar{\lambda}_{M}$	t 值	P 值	$\bar{\lambda}_{IR}$	t 值	P 值
Fama-Macbeth	-0.0001	-0.0952	0.5379	-0.0019	-2.3991	0.0085	-0.1157	-3.6021	0.0002
(v)	$\bar{\lambda}_{CG}$	t 值	P 值	$\bar{\lambda}_{M}$	t 值	P 值	$\bar{\lambda}_{IR}$	t 值	P 值
Fama-Macbeth				0.0063	0.1405	0.4442	-0.0014	-1.4784	0.0701

資料來源：French 個人網站。

說明：1. 表 2 內容呈列考量各投資組合報酬率相關性實證迴歸關係。$\bar{\lambda}_{CG}$ 為每月消費成長風險係數加總後平均數，$\bar{\lambda}_{IR}$ 為每月通膨風險係數加總後平均數，$\bar{\lambda}_{EIR}$ 為每月預期通膨風險係數加總後平均數，$\bar{\lambda}_{UIR}$ 為每月非預期通膨風險係數加總後平均數，$\bar{\lambda}_{M}$ 為每月市場風險係數加總後平均數。

2. 同表 1。

4.4.1 投資組合報酬率之間的相關性

在第二階段只跑一次迴歸：以投資組合在樣本期間的平均報酬做因變數，估計出的貝它值做自變數，然後將這樣的迴歸結果報告在表 1 中 panel B。這樣的話，標準差會低估，因為忽略了投資組合報酬率之間的相關性。在這部份，我們使用 Fama and MacBeth (1973) 方法來處理相關性的問題，亦即第二階段每個月估計一次迴歸，因此每月有一個 λ 估計值，再估計所有月份 λ 的平均值及其標準差來做檢定。

從 (i) 的顯示結果，我們發現即使在第二階段處理各投資組合間相關性問題，消費成長風險係數仍然不顯著，P 值約 0.5209。(ii) 的通膨風險係數與理論預期方向一致、約 10% 顯著。(iii) 顯示消費成長風險因子的 P 值減少至 0.1848，但不顯著，然而通膨風險達 1% 顯著。(iv) 消費成長風險係數仍不顯著，非預期通膨風險係數與預期通膨風險係數皆達 1% 顯著。(v) 通膨風險係數達到 10% 顯著。綜合來看，各投資組合間相關性問題程度並不影響到各因子的預期方向，然而些許影響通膨風險因子定價能力。

4.4.2 更換自變數

在更換自變數的部份，我們把原本計算的非耐久財消費支出改由經由 CPI 調整後實質非耐久財消費支出加上服務支出，或者把通膨風險改由預期通膨風險以及非預期通膨風險聯合替代，甚至加入 Chen et al. (1986) 五因子一併討論訂價效能。從 (i) 看起，即使用了新的代理變數檢定，傳統 CCAPM 的定價績效依然不好，換言之，與代理變數的取決，無多大關聯。從這個角度證明需要其他因素才會有共伴效應出現。接著 (ii) 檢驗消費成長風險與非預期通膨風險等因子的定價效果，結果顯示消費成長風險因子解釋力提升了並在 10% 顯著，且非預期通膨風險達 5% 顯著。

表 3　模型穩健性測試：更換自變數

(i)	λ_{JW_RCG}	t 值	P 值	λ_M	t 值	P 值	λ_{IR}	t 值	P 值							Adj-R^2
不考量異質性	-0.0001	-0.1000	0.8590													0.0014/-0.0420
考量異質性	-0.0001	-0.1500	0.8820													
	λ_{JW_RCG}	Z 值	P > |Z|	λ_M	Z 值	P > |Z|	λ_{IR}	Z 值	P > |Z|							
最大概似法	-0.0001	-0.1900	0.8520													
(ii)	λ_{CG}	t 值	P 值	λ_{UIR}	t 值	P 值	λ_{EIR}	t 值	P 值							
不考量異質性	0.0041	1.9300	0.0670	-0.0202	-2.6400	0.0150										0.2410/0.1720
考量異質性	0.0041	2.5800	0.0170	-0.0202	-2.2100	0.0380										
	λ_{CG}	Z 值	P > |Z|	λ_{UIR}	Z 值	P > |Z|	λ_{EIR}	Z 值	P > |Z|							
最大概似法	0.0041	2.0500	0.0040	-0.0202	-2.8200	0.0050										
(iii)	λ_{JW_RCG}	t 值	P 值				λ_{IR}	t 值	P 值							
不考量異質性	0.0023	2.4100	0.0250				-0.8364	-3.1700	0.0040							0.3449/0.2853
考量異質性	0.0023	3.1300	0.0050				-0.8364	-2.6800	0.0140							
	λ_{JW_RCG}	Z 值	P > |Z|	λ_M	Z 值	P > |Z|	λ_{IR}	Z 值	P > |Z|							
最大概似法	0.0023	2.5700	0.0100				-0.8364	-3.3800	0.0010							
(iv)	$\lambda_{Industry}$	t 值	P 值				λ_{Term}	t 值	P 值	$\lambda_{Default}$	t 值	P 值	λ_{IR}	t 值	P 值	Adj-R^2
不考量異質性	0.0002	0.1200	0.9060				0.0090	5.1400	< 0.0001	0.0204	7.1800	< 0.0001	-0.7426	-5.0800	< 0.0001	0.7658/0.7190
考量異質性	0.0002	0.1200	0.9050				0.0090	5.5500	< 0.0001	0.0204	6.3700	< 0.0001	-0.7426	-4.6700	< 0.0001	
	$\lambda_{Industry}$	Z 值	P > |Z|				λ_{Term}	Z 值	P > |Z|	$\lambda_{Default}$	Z 值	P > |Z|	λ_{IR}	Z 值	P > |Z|	
最大概似法	0.0002	0.1300	0.8930				0.0090	5.7500	< 0.0001	0.0204	8.300	< 0.0001	-0.7426	-5.6800	< 0.0001	
(v)	$\lambda_{Industry}$	t 值	P 值	λ_{UIR}	t 值	P 值	λ_{EIR}	t 值	P 值	λ_{Term}	t 值	P 值	$\lambda_{Default}$	t 值	P 值	Adj-R^2
不考量異質性	0.0003	0.1500	0.8790	-0.0123	-3.0400	0.0070	-0.5380	-5.7400	< 0.0001	0.0086	5.6800	< 0.0001	0.0195	7.1800	< 0.0001	0.7996/0.7469
考量異質性	0.0003	0.1800	0.0420	-0.0123	-2.4500	0.0240	-0.5380	-4.8700	< 0.0001	0.0086	5.8200	< 0.0001	0.0195	5.5600	< 0.0001	
	$\lambda_{Industry}$	Z 值	P > |Z|	λ_{UIR}	Z 值	P > |Z|	λ_{EIR}	Z 值	P > |Z|	λ_{Term}	Z 值	P > |Z|	$\lambda_{Default}$	Z 值	P > |Z|	
最大概似法	0.0003	0.1800	0.8590	-0.0123	-3.4800	< 0.0000	-0.5380	-6.5800	< 0.0001	0.0086	6.5200	< 0.0001	0.0195	8.2400	< 0.0001	

資料來源：本研究整理。

說明：1. 表 3 內容為探討不同代理解釋變數下的實證迴歸關係。λ_{CG}、λ_{IR}、λ_M、λ_{JW_RCG}、$\lambda_{Industry}$、λ_{UIR}、λ_{EIR}、λ_{Term}、$\lambda_{Default}$ 分別為消費成長風險溢酬係數值、通膨風險風險溢酬係數值、市場風險溢酬係數值、調整 CPI 後實質消費風險溢酬係數值、工業生產指數成長風險溢酬係數值、非預期通膨風險溢酬係數值、預期通膨風險溢酬係數值、期間結構溢酬係數值、違約風險溢酬係數值。

2. 同表 1。

(iii) 再次檢驗二因子實質消費訂價模型績效，其中消費的計算改由 CPI 調整後實質非耐久財消費支出加上服務支，檢定後發現調整後解釋力上升至 28.53%。對照 (i) 或 (ii) 來看，消費成長風險溢酬係數更加顯著，且通膨風險溢酬係數也有 1% 顯著。(iv) 是把本模型中消費成長風險因子代換掉，改由工業生產指數成長因子、違約風險因子、期間結構風險因子替代（CCAPM 的假設認為消費成長因素某種程度可以反應這些風險因子），實證後調整後的解釋力為 0.7190，且發現在通膨風險的解釋能力受影響程度不大與預測方向不變，額外的三個訂價因子讓原模型的解釋能力增加。最後，為了更清楚通膨風險在資產訂價的角色，我們把通膨風險因子拆解成預期通膨風險與非預期通膨風險因子，並且配合總體經濟觀點思考，使得 (iv) 的模型變成 Chen et al. (1986) 五因子實證模型，檢驗後其結果顯示調整後解釋力又較 (iv) 增加且方向不變。由以上的討論而知，預測方向約略不變且通膨風險因子不會反應在消費成長，消費成長風險與通膨風險傾向聯合訂價投資組合報酬，其中與變數的定義方式較無關聯。另外，在實質環境中若把 Chen et al. (1986) 部份總體經濟因子代表消費成長風險與通膨風險因子來聯合檢定，那麼實質購買能力變化會影響資產價格的結論不會有所改變。

4.4.3 自變數與誤差程度

接著，我們要探討估計誤差對於本文實證結果的影響。Roll (1977) 對於 CAPM 檢定的批評，其中有一項就是效率投資組合的界定，選取錯的投資組合就會產生實證關係的衡量誤差。類似的概念，先前已有提過。以消費如何定義來說，現在的問題在於我們認為非耐久財消費支出來衡量理論上的消費的觀點是對的，不需要加入服務支出、CPI 調整、或是耐久財支出來使測量誤差變小，因為我們擔憂加入其他項目的總合消費還是會存在測量誤差且程度可能不小。於此，不調整非耐久財消費支出的補救措施就是對代理變數信賴度做變數迴歸誤差估計 (errors in variables regression)。表 4 內

表 4　100%、75%、50% 與 25% 四種狀況下訂價誤差與誤差變數迴歸結果

panel A

100%	S1	S2	S3	S4	S5	75%	S1	S2	S3	S4	S5
B1	0.0249	0.0241	0.0210	0.0218	0.0085	B1	0.0287	0.0270	0.0232	0.0236	0.0076
B2	0.0204	0.0274	0.0220	0.0168	0.0142	B2	0.0200	0.0310	0.0234	0.0179	0.0154
B3	0.0174	0.0212	0.0217	0.0145	0.0150	B3	0.0164	0.0226	0.0241	0.0139	0.0170
B4	0.0131	0.0261	0.0194	0.0111	0.0162	B4	0.0103	0.0294	0.0210	0.0094	0.0182
B5	0.0101	0.0210	0.0189	0.0197	0.0223	B5	0.0058	0.0213	0.0191	0.0205	0.0276
50%	S1	S2	S3	S4	S5	25%	S1	S2	S3	S4	S5
B1	0.0328	0.0305	0.0260	0.0253	0.0056	B1	0.0007	0.0098	0.0143	0.0067	-0.0060
B2	0.0152	0.0367	0.0243	0.0196	0.0190	B2	-0.0660	0.0389	-0.0012	0.0214	0.0538
B3	0.0113	0.0245	0.0289	0.0112	0.0227	B3	-0.0560	0.0205	0.0481	-0.0236	0.0738
B4	0.0016	0.0364	0.0245	0.0047	0.0234	B4	-0.0808	0.0732	0.0412	-0.0362	0.0638
B5	0.0067	0.0193	0.0178	0.0206	0.0422	B5	-0.1191	-0.0262	-0.0048	0.0017	0.1660

panel B

(i)	λ_{CG}	t 值	P 值	t 值	P 值	Adj-R^2
不考量異質性	-0.0008	-2.1600	0.0420	-3.3300	0.0030	0.3604/0.3023
考量異質性	-0.0008	-1.4600	0.1590	-2.4200	0.0240	
	λ_{CG}	Z 值	P >｜Z｜	Z 值	P >｜Z｜	
最大概似法	-0.0008	-2.3100	0.0210	-3.5500	< 0.0001	
(ii)	λ_{CG}	t 值	P 值	t 值	P 值	Adj-R^2
不考量異質性	0.0002	0.3900	0.6990	-3.4900	0.0020	0.3604/0.3023
考量異質性	0.0002	0.3700	0.7180	-2.8000	0.0110	
	λ_{CG}	Z 值	P >｜Z｜	Z 值	P >｜Z｜	
最大概似法	0.0002	0.4200	0.6770	-3.7200	< 0.0001	
(iii)	λ_{CG}	t 值	P 值	t 值	P 值	Adj-R^2
不考量異質性	0.0013	1.3000	0.2070	-3.5100	0.0020	0.3604/0.3023
考量異質性	0.0013	1.5200	0.1430	-2.9100	0.0080	
	λ_{CG}	Z 值	P >｜Z｜	Z 值	P >｜Z｜	
最大概似法	0.0013	1.3800	0.1660	-3.7400	< 0.0001	
(iv)	λ_{CG}	Z 值	P 值	t 值	P 值	Adj-R^2
不考量異質性	0.0024	1.6700	0.1090	-3.5200	0.0020	0.3604/0.3023
考量異質性	0.0024	2.1600	0.0420	-2.9600	0.0070	
	λ_{CG}	Z 值	P >｜Z｜	Z 值	P >｜Z｜	
最大概似法	0.0024	1.7800	0.0750	-3.7500	< 0.0001	

資料來源：本研究整理。

說明：1. panel A 說明在二個自變數皆為 100%、75%、50%與 25%等信賴度情形下，對每個投組可能發生的訂價誤差狀況。panel B 內的(i)、(ii)、(iii) 及 (iv) 分別為 25%、50%、75%及 100%信賴度下的橫斷面迴歸關係。λ_{CG}、λ_{IR} 分別為消費成長風險溢酬係數值、通膨風險溢酬係數值。

2. 同表 1。

的 panel A 說明非耐久財消費支出與 *Ln*（通膨率）在 100%、75%、50% 與 25% 不同的信賴度情形下，對每個投組可能發生的訂價誤差狀況。panel B 是依照 panel A 的各種可能誤差概況，將所得到風險係數值各自遞行代入，並進行第二階段橫斷面迴歸分析，其中 (i)、(ii)、(iii) 及 (iv) 分別為二個自變數皆為 25%、50%、75%、100% 信賴度下的橫斷面迴歸關係。另外，我們按照 Campbell et al. (1997) 的建議，以最大概似法控制第一階段貝它值估計誤差，以提高橫斷面檢定的精確性。

panel A 除了可以看出在不同信賴度下有不同的訂價誤差，而且從之中的誤差變化程度還可以觀察到定價因子在 25% 信賴程度之下，對於規模最小的投資組合 (S1) 與價值最大的投資組合 (H5) 訂價誤差值與在 50%、75%、100% 時的信賴程度有明顯差異。這些效果會影響到第二階段橫斷面關係。panel B，在 50%、75%、100% 信賴度下消費成長風險溢酬係數值不顯著且顯著性隨信賴度下降而變差（在 100% 的 P 值為 0.109、在 75% 的 P 值為 0.207、在 50% 的 P 值為 0.699），再低至 25% 雖有顯著關係但為預測相反的迴歸關係（消費成長風險溢酬係數值為 -0.0008，達 5% 負向顯著），也許可以這樣推測，消費成長風險溢酬係數值受定價誤差效應影響，尤其是規模最小或是價值最大的投資組合。至於通膨風險因子，其訂價績效與先前的結果一致，換言之，較不受自變數信賴度影響，呈現著相同的意義。

4.4.4 更換受檢定的資產投資組合

我們更換受檢定資產，以檢測其穩健性。表 5 內 (i)、(ii) 及 (iii) 的被檢定資產依次為依規模與價值因子排列分類且以價值加權計算的 5×5、2×3、10×10 投資組合，而 (iv) 及 (v) 則為依規模因子與長、短期反轉因子而成 5×5 投資組合。而 (vi) 的被檢定資產是依規模與價值因子排列、並以等權計算的 5×5 投資組合。

表 5　實證結果：更換被檢定資產組合

(i)	λ_{CG}	t 值	P 值	λ_{IR}	t 值	P 值	Adj-R^2
不考量異質性	0.0024	1.6700	0.1090	-0.8219	-3.5200	0.0020	0.3604/0.3023
考量異質性	0.0024	2.1600	0.0420	-0.8219	-2.9600	0.0070	
	λ_{CG}	Z 值	P > | Z |	λ_{IR}	Z 值	P > | Z |	
最大概似法	0.0024	1.7800	0.0750	-0.8219	-3.7500	< 0.0001	
(ii)	λ_{CG}	t 值	P 值	λ_{IR}	t 值	P 值	Adj-R^2
不考量異質性	0.0065	1.0400	0.3740	-1.1239	-1.1800	0.2520	0.3210/-0.1317
考量異質性	0.0065	1.1500	0.3320	-1.1239	-1.1600	0.3300	
	λ_{CG}	Z 值	P > | Z |	λ_{IR}	Z 值	P > | Z |	
最大概似法	0.0065	1.4700	.01410	-1.1239	-1.6500	0.0980	
(iii)	λ_{CG}	t 值	P 值	λ_{IR}	t 值	P 值	Adj-R^2
不考量異質性	0.0061	3.6400	< 0.0001	-1.0564	-3.7100	< 0.0001	0.2025/0.1860
考量異質性	0.0061	0.9000	0.3700	-1.0564	-2.7100	0.0080	
	λ_{CG}	Z 值	P > | Z |	λ_{IR}	Z 值	P > | Z |	
最大概似法	0.0061	3.6900	< 0.0001	-1.564	-3.7700	< 0.0001	
(iv)	λ_{CG}	t 值	P 值	λ_{IR}	t 值	P 值	Adj-R^2
不考量異質性	0.0031	2.7700	0.0110	-0.2282	-1.5500	0.1340	0.2858/0.2209
考量異質性	0.0031	3.8600	< 0.0001	-0.2282	-1.6400	0.1150	
	λ_{CG}	Z 值	P > | Z |	λ_{IR}	Z 值	P > | Z |	
最大概似法	0.0031	2.9500	0.0030	-0.2282	-1.6600	0.0980	
(v)	λ_{CG}	t 值	P 值	λ_{IR}	t 值	P 值	Adj-R^2
不考量異質性	0.0024	1.2200	0.2340	0.3025	1.1400	0.2680	0.1232/0.0435
考量異質性	0.0024	1.1400	0.2650	0.3025	0.8200	0.4220	
	λ_{CG}	Z 值	P > | Z |	λ_{IR}	Z 值	P > | Z |	
最大概似法	0.0024	1.300	0.1920	0.3025	1.2100	0.2260	
(vi)	λ_{CG}	t 值	P 值	λ_{IR}	t 值	P 值	Adj-R^2
不考量異質性	0.0014	0.8900	0.3850	-0.9432	-4.7100	< 0.0001	0.5108/0.4663
考量異質性	0.0014	1.1800	0.2520	-0.9432	-4.9800	< 0.0001	
	λ_{CG}	Z 值	P > | Z |	λ_{IR}	Z 值	P > | Z |	
最大概似法	0.0014	0.9500	0.3440	-0.9432	-5.0200	< 0.0001	

資料來源：本研究整理。

說明：表 5 內 (i)、(ii) 及 (iii) 的被檢定資產依次為依規模與價值因子排列分類且以價值加權計算的 5×5、2×3、10×10 投資組合平均報酬，而 (iv) 及 (v) 則為依規模因子與長、短期反轉因子而成 5×5 投資組合平均報酬。而 (vi) 的被檢定資產是依規模與價值因子排列、並以等權計算的 5×5 投資組合平均報酬。λ_{CG}、λ_{IR} 分別為消費成長風險溢酬係數值、通膨風險溢酬係數值、市場風險溢酬係數值，研究期間從 1978 年 3 月起至 2005 年 12 月止。

(i) 為之前的基準迴歸，不再累述。(ii) 一般的解釋力為 32.10%，但調整後的解釋力為-0.1317，其中 λ_{CG} 、 λ_{IR} 分別為 0.0065、-1.1239。(iii) 調整後的解釋力為 18.60%，λ_{CG} 為 0.0061，P 值小於 0.0001，達 1% 的顯著水準；而 λ_{IR} 為-1.0564，P 值為小於 0.0001，達 1% 顯著水準。

(iv) 調整後的解釋能力為 22.09%，λ_{CG} 為 0.0031，P 值為 0.0110，達 5% 的顯著水準；λ_{IR} 為-0.2282，P 值為 0.1340，接近 10% 顯著水準。(v) 調整後的解釋能力為 4.35%，λ_{CG} 、λ_{IR} 皆不顯著。(vi) 調整後的解釋能力為 46.63%，λ_{CG} 為 0.0014，P 值為 0.3850，沒有達 10% 顯著水準；λ_{IR} 為 -0.9432，P 值小於 0.0001，達 1% 顯著水準。整體來看，這些實證結果顯示變更受檢定的資產投資組合後，訂價因子的績效性受到影響但預測方向仍呈現出一致性，尤其是通膨風險因子。[21]

5. 結論

本文從實質報酬與實質消費著手，以完全規避通膨風險資產作為評價基礎，透過實質消費能力變化，建立了實質經濟體系內的共同基金定理，本文的共同基金定理不僅可以提供投資人獲取規避通膨風險的經濟效益，也可降低共同基金的需求數目，以減少交易成本。

接著，本文遵循 Breeden (1979) 架構，推導出二因子實質消費資本資產訂價模型，均衡模型中的二因子分別為消費成長風險因子與通膨風險因子，實證數據顯示，二因子實質消費資本資產訂價模

[21] 另外，我們再嘗試把被檢定資產換成各類的產業投資組合。限於篇幅表格內容沒有被呈現。被檢定資產依次為依產業分類而成的 12、17、30、38、48、49 投資組合。產業投資組合被解釋的部份並沒有比依規模和價值分類的投資組合或是規模與反轉因子來得好，原因可能是產業風險程度平均而言對投資人的消費能力影響不太大，導致投資人所要求的風險溢酬並不需要有多大的改變即可進行投資行為。

型相較於 Breeden (1979) 消費資本資產訂價模型、單一通膨風險因子模型以及二因子實質 CAPM 模型，較能解釋資產價格橫斷面的變異。在穩健性部份，更換自變數、被檢定資產、考慮估計誤差與內生性，二個因子預測方向受到的影響不大，在解釋力的部份，通膨風險溢酬較為穩定，消費風險溢酬係數值並不穩定。這些實證結果意謂著消費成長風險溢酬並不一定被投資人納入必要報酬選項當中，而通膨風險造成投資組合實質平均報酬下降，讓厭惡實質購買力受影響投資人接受較小通膨風險溢酬。

最後，本文並沒有就實質工資對於資產配置以及資產價格的影響作深入探討，未來研究可以嘗試將實質工資這項因素納入模型內。

附錄 1

首先，抗通膨債券資產的報酬可以表示如下式

$$\frac{dB}{B}=(r+\pi_P)dt+\sigma_P dz_P \text{。} \tag{A1.1}$$

引用內文中物價指數隨機過程 (2) 式，並計算物價指數變化與 (A1.1) 式的共變異數，可推得

$$\frac{dP}{P}=\pi_P dt+\sigma_P dz_P \text{，} \tag{A1.2}$$

$$\frac{dB}{B}\frac{dP}{P}=\left(\frac{dP}{P}\right)^2=\sigma_P^2 dt \text{。} \tag{A1.3}$$

運用 Ito's 輔助定理，可知相同到期日完全規避通膨風險債券資產的實質酬動態過程

$$\frac{d\left(\frac{B}{P}\right)}{\frac{B}{P}}=\frac{dB}{B}-\frac{dP}{P}-\frac{dB}{B}\frac{dP}{P}+\left(\frac{dP}{P}\right)^2 \text{。} \tag{A1.4}$$

定義 $b=\dfrac{B}{P}$ ，並把 (A1.2) 式與 (A1.3) 式代入 (A1.4) 式運算其結果，則實質報酬動態過程為

$$\begin{aligned}\frac{db}{b}&=\frac{dB}{B}-\frac{dP}{P}-\frac{dB}{B}\frac{dP}{P}+\left(\frac{dP}{P}\right)^2=\frac{dB}{B}-\frac{dP}{P}\\&=(r+\pi_P)dt+\sigma_P dz_P-\pi_P dt-\sigma_P dz_P=rdt \text{。}\end{aligned} \tag{A1.5}$$

因此具有相同到期日的完全規避通膨風險債券資產，實質報酬並不會受到通膨風險 $\sigma_P dz_P$ 影響。

附錄 2

(11) 式的原式為

$$0=\max_{\underline{\alpha},c}\Bigg[\varepsilon e^{-\rho t}U(c,t)+J_t+J_w^k\ \mathrm{E}_t\left(\frac{dw}{dt}\right)$$

$$+J'_{\underline{s}}\ \mu_{\underline{s}}+\frac{1}{2}J_{ww}\ \mathrm{var}\left(\frac{dw}{dt}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum\sum J_{s_is_j}\sigma_{s_i}\sigma_{s_j}\rho_{s_is_j}+w^K\underline{\alpha}^T\underline{\underline{V}}_{as}J_{\underline{ws}}\Bigg],$$

其中 $\mathrm{E}_t\left(dw/dt\right)$ 與 $\mathrm{var}\left(dw/dt\right)$ 可以為完全抗通膨資產瞬間預期報酬 $\left(\underline{\alpha}^T(\underline{\mu}_a-r\underline{1})+r-c/w\right)$ 以及瞬間變異數 $w^2\underline{\alpha}^T\underline{\underline{V}}_{aa}\underline{\alpha}$ ，可能也會因市場不存在此資產，而為另一種報酬－變異數型式。在不失一般性情況之下，假設狀態風險不影響投資組合報酬，探討 $\mathrm{E}_t\left(dw/dt\right)$ 與 $\mathrm{var}\left(dw/dt\right)$ 組成型態，推論共同基金定理，且與 Munk et al. (2004) 命題結果比較。

(i) 如果存在完全規避通膨風險債券資產，其實質報酬為 $d[(B/P)/(B/P)]=db/b=rdt$ ，而實質財富預算限制式以及變異數分別為

$$dw=w\left(\underline{\alpha}^T(\underline{\mu}_A-\underline{\sigma}_{AP}+\sigma_P^2-r\underline{1})+r-\frac{c}{w}\right)dt$$

$$+w\left(\sum_{j=1}^N\alpha_j(\sigma_jdz_j-\sigma_Pdz_P)\right), \tag{A2.1}$$

$$(dw)^2\ (dw)^2=w\left(\sum_{j=1}^N\alpha_j(\sigma_jdz_j-\sigma_Pdz_P)\right)^2=w^2\underline{\alpha}^T\underline{\underline{\Sigma}}\underline{\alpha}dt\ , \tag{A2.2}$$

其中 $\underline{\alpha}^T \underline{\underline{\Sigma}}\underline{\alpha} \equiv \text{var}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\sigma_j^P dz_j^P = \text{var}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(\sigma_j dz_j - \sigma_P dz_P)$ 。在不失一般性以及分析方便情況之下，假定投資機會集合非動態變化，所以直接設定 $dwds = 0$ 。

在求得實質投資人的最適投資組合之前，必須先對 HJB 方程式內的 α_j 項目做一階微分。只要 HJB 方程式內的項目沒有 α_j ，則此項目會在微分過程中消失。換句話說，此項目在實質投資人的資產配置過程中，並不需要共同基金來規避風險。先就 (A2.1) 式與 (A2.2) 式來看， dw 與 dw^2 等式右邊都有 α_j 項目。直觀上，不論有無存在完全規避通膨債券資產， dw 項目對實質投資人投資組合造成的共同基金數都一樣。因此，比較分析上，只要探討 dw^2 變異數項目（或稱風險項目）需要有多少個共同基金數目，風險才可以被規避。

如果沒有完全抗通膨風險資產之下，市場上無風險性債券資產實質報酬為

$$\frac{db}{b} = \frac{d\left(\frac{B}{P}\right)}{\frac{B}{P}} = \frac{dB}{B} - \frac{dP}{P} - \frac{dB}{B}\frac{dP}{P} + \left(\frac{dP}{P}\right)^2$$
$$= (R - \pi + \sigma_P^2) - \sigma_P dz_P 。 \tag{A2.3}$$

風險性資產的實質報酬為

$$\frac{da}{a} = \frac{d\left(\frac{A}{P}\right)}{\frac{A}{P}} = \frac{dA}{A} - \frac{dP}{P} - \frac{dA}{A}\frac{dP}{P} + \left(\frac{dP}{P}\right)^2$$
$$= (\mu_A - \pi - \sigma_{AP} + \sigma_P^2)dt - \sigma_P dz_P + \sigma_A dz_A , \tag{A2.4}$$

且

$$\frac{da}{a} - \frac{db}{b} = (\mu_{A_j} - R - \sigma_{A_j P})dt + \sigma_{A_j} dz_{A_j} 。 \tag{A2.5}$$

多－空投資策略 (long-short strategy) 中的風險因子只有在不存在完全規避通膨風險債券資產時，如 (A2.5) 式，通膨風險 $\sigma_P dz_P$ 才會被規避掉。雖然多－空投資策略可以規避通膨風險，如 (A2.6) 式內的 $\left(da_j/a_j - db/b\right)$，但是就整體投資組合策略，規避掉的通膨風險，全數轉嫁到 (A4.6) 式內的 $+db/b$ 部位，因此 $+db/b$ 投資部位會有通膨風險因子 $\sigma_P dz_P$ 出現。

$$dw = w\left\{\left[\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\left(\frac{da_j}{a_j}-\frac{db}{b}\right)\right]+\frac{db}{b}-\frac{c}{w}dt\right\}。\qquad \text{(A2.6)}$$

前一段文字的概念，可用下列式子表示

$$\begin{aligned} dw = {} & w\left\{\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\left[(\mu_{A_j}-R-\sigma_{A_jP})\right]+(R-\pi+\sigma_P^2)\right\}dt \\ & -w\sigma_P dz_P + w\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\sigma_{A_j}dz_{A_j}， \qquad \text{(A2.7)} \end{aligned}$$

(A2.7) 式等式右邊中 db/b 項目內的 $-\sigma_P dz_P$，在資產配置過程中，會對 $\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\left[(\mu_{A_j}-R-\sigma_{A_jP})dt+\sigma_{A_j}dz_{A_j}\right]$ 產生影響，因此在不存在完全規避通膨風險債券資產之下，它會產生風險，也就是計算共變異數後，存在一個與投資組合有關且微分後不會等於零的經濟項目 $-2\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\sigma_j\sigma_P\rho_{PA_j}$。這個概念的簡易證明，如同對(A2.8) 式中的要素解析可得到

$$\begin{aligned} (dw)^2 &= \left(-w\sigma_P dz_P + w\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\sigma_{A_j}dz_{A_j}\right)^2 \\ &= w^2\left(\sigma_P^2+\underline{\alpha}^T\underline{\underline{\Sigma}}\,\underline{\alpha}-2\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\sigma_j\sigma_P\rho_{PA_j}\right)dt。 \qquad \text{(A2.8)} \end{aligned}$$

綜合而言，實質財富預算限制式 (A2.1) 式和 (A2.7) 式中，對 dw 取條件期望值後，擁有 α_j 項目的個數是一樣。所以，對市場有無存在完全規避通膨債券資產的實質投資人而言，二條方程式中的實質財富變化 dw，在資產配置過程中所需用的共同基金數目是一樣。因此，共同基金數目的差異，主要落在實質財富風險變化 $(dw)^2$ 項目組成要素上。

在市場沒有存在完全規避通膨風險資產情況之下，$(dw)^2$ 的結構中有投資組合權重 α_j 元素為 $\underline{\alpha}^T \underline{\underline{V}}\,\underline{\alpha}$ 和 $-2\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\sigma_j\sigma_P\rho_{PA_j}$。在效用極大化的過程中，實質投資人會對最適權重 α_j 微分，求取他想要的投資組合以及均衡時的資產配置。因此，實質投資人在資產配置時，對 (A2.2) 式與 (A2.8) 式等式右邊中的 α_j 微分後，就項目數而言，(A2.8) 式的 $(dw)^2$，在一階偏微分後多一個項目 $\partial\left(-2\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\sigma_j\sigma_P\rho_{PA_j}\right)\Big/\partial\alpha_j$，而且它不會等於零，因此需要多一個共同基金，以規避通膨風險的影響。

附錄 3

引用內文命題 2 的(24)式

$$\underline{\mu}_A-(r+\pi)\underline{1}=\left(-\sigma_P^2-\gamma_c^k\sigma_{P\ln c^k}\right)\underline{1}+(1-\gamma_c^k)\underline{\sigma}_{A\ln P}+\gamma_c^k\underline{\sigma}_{A\ln C^k}。\tag{A3.1}$$

將式子內附有相對風險趨避係數 γ_c^k 的項目，歸納在一起後，可以寫成下式

$$\underline{\mu}_A-(r+\pi-\sigma_P^2)\underline{1}-\underline{\sigma}_{A\ln P}=-\gamma_c^k\sigma_{P\ln c^k}\underline{1}+\gamma_c^k\left(-\underline{\sigma}_{A\ln P}+\underline{\sigma}_{A\ln C^k}\right)。\tag{A3.2}$$

將式子內的相對風險趨避係數 γ_c^k ，移到等式的左邊，可以重新寫成下式

$$\frac{1}{\gamma_c^k}\left[\underline{\mu}_A-(r+\pi-\sigma_P^2)\underline{1}-\underline{\sigma}_{A\ln P}\right]=-\sigma_{P\ln c^k}\underline{1}-\underline{\sigma}_{A\ln P}+\underline{\sigma}_{A\ln C^k}。\tag{A3.3}$$

將上式 $\sigma_{P\ln c^k}$ 項目內的實質消費 $c^k=C^k/P$ ，使用 Ito's 輔助定理，將 C^k/P 重新展開，並寫成名目消費成長以及物價成長變化的模式，整理後可以寫成下式

$$\frac{1}{\gamma_c^k}\left[\underline{\mu}_A-(r+\pi-\sigma_P^2)\underline{1}-\underline{\sigma}_{A\ln P}\right]=\sigma_P^2\underline{1}-\sigma_{\ln P\ln C^k}\underline{1}-\underline{\sigma}_{A\ln P}+\underline{\sigma}_{A\ln C^k}。\tag{A3.4}$$

加總 γ_c^k 項目以及每個實質投資人消費成長後，可以寫成下式

$$\left[\underline{\mu}_A-(r+\pi-\sigma_P^2)\underline{1}-\underline{\sigma}_{A\ln P}\right]\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}$$
$$=\sum_{k=1}^{K}\sigma_P^2\underline{1}-\sigma_{\ln P\ln C^k}\underline{1}-\underline{\sigma}_{A\ln P}+\underline{\sigma}_{A\ln C^k}\text{ 。}\tag{A3.5}$$

再將 (A3.5) 式等式左邊的 $\sum_{k=1}^{K}\left(1/\gamma_c^k\right)$ ，移至等式右邊，可以推得

$$\left[\underline{\mu}_A-(r+\pi-\sigma_P^2)\underline{1}-\underline{\sigma}_{A\ln P}\right]$$
$$=\frac{1}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\left(K\sigma_P^2\underline{1}-\sigma_{\ln P}\sum_{k=1}^{K}\ln C^k\underline{1}-K\underline{\sigma}_{A\ln P}+\underline{\sigma}_A\sum_{k=1}^{K}\ln C^k\right)\text{。}\tag{A3.6}$$

(A3.6) 式的矩陣型態為

$$\underline{\mu}_A-\left(r+\pi-\sigma_P^2+\frac{K\sigma_P^2-\sigma_{\ln P\ln C^m}}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\right)\underline{1}$$

$$=\left(-\underline{\sigma}_{A\ln P}\quad \underline{\sigma}_{A\ln C^m}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{K}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}-1\\[2ex] \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\end{pmatrix}\text{。}\tag{A3.7}$$

令 $A=\ln C^m$ 或$=\ln P$ ，分別代入 (A3.7) 式中，整理成 (A3.8) 式與 (A3.9) 式

$$\mu_P-\left(r+\pi-\sigma_P^2+\frac{K\sigma_P^2-\sigma_{\ln P\ln C^m}}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\right)=\begin{pmatrix}-\sigma_P^2 & \sigma_{\ln P\ln C^m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{K}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}-1\\ \frac{1}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\end{pmatrix}，\text{(A3.8)}$$

$$\mu_{C^m}-\left(r+\pi-\sigma_P^2+\frac{K\sigma_P^2-\sigma_{\ln P\ln C^m}}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\right)=\begin{pmatrix}-\sigma_{\ln C^m\ln P} & \sigma_{C^m}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{K}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}-1\\ \frac{1}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\end{pmatrix}。\text{(A3.9)}$$

再將 (A3.8) 式與 (A3.9) 式整合成 2×2 的矩陣，可得

$$\begin{pmatrix}\mu_P-\left(r+\pi-\sigma_P^2+\frac{K\sigma_P^2-\sigma_{\ln P\ln C^m}}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\right)\\ \mu_{C^m}-\left(r+\pi-\sigma_P^2+\frac{K\sigma_P^2-\sigma_{\ln P\ln C^m}}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\sigma_P^2 & \sigma_{\ln P\ln C^m}\\ -\sigma_{\ln C^m\ln P} & \sigma_{C^m}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{K}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}-1\\ \frac{1}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\end{pmatrix}。\qquad\text{(A3.10)}$$

將 (A3.10) 式等式右邊的變異數－共變異數矩陣，移項至左邊，(A3.10) 式等式右邊的 $\left[K\Big/\sum_{k=1}^{K}\left(1/\gamma_c^k\right)-1 \quad 1\Big/\sum_{k=1}^{K}\left(1/\gamma_c^k\right)\right]'$ 可以寫成下式

$$\begin{pmatrix} \dfrac{K}{\sum_{k=1}^{K}\dfrac{1}{\gamma_c^k}}-1 \\ \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{K}\dfrac{1}{\gamma_c^k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_P^2 & \sigma_{\ln P \ln C^m} \\ -\sigma_{\ln C^m \ln P} & \sigma_{C^m}^2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \mu_P-\left(r+\pi-\sigma_P^2+\dfrac{K\sigma_P^2-\sigma_{\ln P\ln C^m}}{\sum_{k=1}^{K}\dfrac{1}{\gamma_c^k}}\right) \\ \mu_{C^m}-\left(r+\pi-\sigma_P^2+\dfrac{K\sigma_P^2-\sigma_{\ln P\ln C^m}}{\sum_{k=1}^{K}\dfrac{1}{\gamma_c^k}}\right) \end{pmatrix}。 \tag{A3.11}$$

最後將 (A3.11) 式等式右邊的組成元素，代回 (A3.7) 式內，就可以得到內文命題的結果，如下式所示

$$
\begin{aligned}
&\underline{\mu}_A - \left(r+\pi-\sigma_P^2 + \frac{K\sigma_P^2 - \sigma_{\ln P \ln C^m}}{\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\gamma_c^k}} \right)\underline{1} \\
&= \left(-\underline{\sigma}_{A\ln P} \quad \underline{\sigma}_{A\ln C^m}\right) \begin{pmatrix} -\sigma_P^2 & \sigma_{\ln P \ln C^m} \\ -\sigma_{\ln C^m \ln P} & \sigma_{C^m}^2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} \mu_P - \left(r+\pi-\sigma_P^2 + \frac{K\sigma_P^2 - \sigma_{\ln P \ln C^m}}{\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\gamma_c^k}} \right) \\ \mu_{C^m} - \left(r+\pi-\sigma_P^2 + \frac{K\sigma_P^2 - \sigma_{\ln P \ln C^m}}{\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{\gamma_c^k}} \right) \end{pmatrix} \text{。} \qquad \text{(A3.12)}
\end{aligned}
$$

附錄 4

引用內文的 (25) 式

$$\underline{\mu}_A - R\underline{1} = (1-\gamma_c^k)\underline{\sigma}_{A\ln P} + \gamma_c^k \underline{\sigma}_{A\ln C^k} \text{ 。} \tag{A4.1}$$

將等式右邊項目 $(1-\gamma_c^k)\underline{\sigma}_{A\ln P}$ 展開，再將展開之後右邊含有 γ_c^k 的項目，全部歸納在一起，可得

$$\underline{\mu}_A - R\underline{1} = \underline{\sigma}_{A\ln P} + \gamma_c^k\left(\underline{\sigma}_{A\ln C^k} - \underline{\sigma}_{A\ln P}\right) \text{ 。} \tag{A4.2}$$

將 (A4.2) 式右邊的 $\underline{\sigma}_{A\ln P}$ 移項至左邊後，等式兩邊分別除以風險趨避係數 γ_c^k ，並加總風險趨避係數 γ_c^k 及每個人的消費成長 $\ln C^k$ ，可得下列均衡等式

$$\left(\underline{\mu}_A - R\underline{1} - \underline{\sigma}_{A\ln P}\right)\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k} = \underline{\sigma}_{A\ln C^m} - K\underline{\sigma}_{A\ln P} \text{ 。} \tag{A4.3}$$

將 (A4.3) 式左邊括號內的項目展開，再將 $-\underline{\sigma}_{A\ln P}\sum_{k=1}^{K}\left(1/\gamma_c^k\right)$ 項目移項至等式右邊，接著式子的兩邊再同除以 $\sum_{k=1}^{K}\left(1/\gamma_c^k\right)$ ，可得

$$\underline{\mu}_A - R\underline{1} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\underline{\sigma}_{A\ln C^m} - \frac{K}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}\underline{\sigma}_{A\ln P} + \underline{\sigma}_{A\ln P} \text{ 。} \tag{A4.4}$$

合併等式右邊的 $\underline{\sigma}_{A\ln P}$ 項，並用矩陣方式表示如下

$$\underline{\mu}_A - R\underline{1} = \begin{pmatrix}\underline{\sigma}_{A\ln C^m} & \underline{\sigma}_{A\ln P}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}} \\ -\dfrac{K}{\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{\gamma_c^k}}+1\end{pmatrix} \text{ 。} \tag{A4.5}$$

同理令 $A=\ln C^{m}$ 或 $=\ln P$，其超額報酬的矩陣形式為

$$\begin{pmatrix} \mu_{P}-R \\ \mu_{C^{m}}-R \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_{\ln P\ln C^{m}} & \sigma_{P}^{2} \\ \sigma_{C^{m}}^{2} & \sigma_{\ln C^{m}\ln P} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{K}\dfrac{1}{\gamma_{c}^{k}}} \\ -\dfrac{K}{\sum_{k=1}^{K}\dfrac{1}{\gamma_{c}^{k}}}+1 \end{pmatrix}。\tag{A4.6}$$

要求得 (A4.6) 式等式右邊的 $\left[1\big/\sum_{k=1}^{K}\left(1/\gamma_{c}^{k}\right)\left(-K\big/\sum_{k=1}^{K}\left(1/\gamma_{c}^{k}\right)\right)+1\right]'$，可將等式兩邊同乘以訂價因子變異數－共變異數的反矩陣，便可推得

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{K}\dfrac{1}{\gamma_{c}^{k}}} \\ -\dfrac{K}{\sum_{k=1}^{K}\dfrac{1}{\gamma_{c}^{k}}}+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_{\ln P\ln C^{m}} & \sigma_{P}^{2} \\ \sigma_{C^{m}}^{2} & \sigma_{\ln C^{m}\ln P} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mu_{P}-R \\ \mu_{C^{m}}-R \end{pmatrix}。\tag{A4.7}$$

最後將 (A4.7) 式內的右邊組成元素，代回至 (A4.5) 式內，就可得到二因子均衡訂價方程式

$$\underline{\mu}_{A}-R\underline{1}=\begin{pmatrix} \underline{\sigma}_{A\ln C^{m}} & \underline{\sigma}_{A\ln P} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{\ln P\ln C^{m}} & \sigma_{P}^{2} \\ \sigma_{C^{m}}^{2} & \sigma_{\ln C^{m}\ln P} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mu_{P}-R \\ \mu_{C^{m}}-R \end{pmatrix}。\tag{A4.8}$$

參考文獻

Bakshi, G. S. and Z. Chen (1996), "Inflation, Asset Prices, and the Term Structure of Interest Rates in Monetary Economies," *The Review of Financial Studies*, 9:1, 241-275.

Berkelaar, A. and R. Kouwenberg (1999), "Investing in a Real World with Mean-Reverting Inflation," Erasmus University of Rotterdam Working Paper No. EI-9960/A.

Bodie, Z., R. C. Merton and W. F. Samuelson (1992), "Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life Cycle Model," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 16:3-4, 427-449.

Breeden, D. T. (1979), "An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities," *Journal of Financial Economics*, 7:3, 265-296.

Breeden, D. T., M. R. Gibbons and R. H. Litzenberger (1989), "Empirical Tests of the Consumption-Oriented CAPM," *The Journal of Finance*, 44:2, 231-262.

Brennan, M. J. and Y. Xia (2002), "Dynamic Asset Allocation under Inflation," *The Journal of Finance*, 57:3, 1201-1238.

Campbell, J. Y., A. W. Lo and A. C. MacKinlay (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, New Jersey: Princeton University Press.

Campbell, J. Y. and L. M. Viceira (2001), "Who Should Buy Long-Term Bonds?" *The American Economic Review*, 91:1, 99-127.

Chen, N. F., R. Roll and S. A. Ross (1986), "Economic Forces and the Stock Market," *The Journal of Business*, 59:3, 383-403.

Chu, Y. (2006), "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model with Owner-Occupied Housing," *Real Estate Economics*, 38:3, 427-465.

Cochrane, J. (2001), *Asset Pricing*, New Jersey: Princeton University Press.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, Jr. and S. A. Ross (1985a), "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," *Econometrica*, 53:2, 363-384.

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, Jr. and S. A. Ross (1985b), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53:2, 385-407.

Datastream (1978-2005), http://ermg.lib.nccu.edu.tw/cgi-bin/er/swlink.cgi.

Elliott, G., T. J. Rothenberg and J. H. Stock (1996), "Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root," *Econometrica*, 64:4, 813-836.

Fama, E. F. (1981), "Stock Returns, Real Activity, Inflation, and Money," *The American Economic Review*, 71:4, 545-565.

Fama, E. F. and K. R. French (1992), "The Cross-Section of Expected Stock Returns," *The Journal of Finance*, 47:2, 427-465.

Fama, E. F. and K. R. French (1993), "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds," *Journal of Financial Economics*, 33:1, 3-56.

Fama, E. F. and J. D. MacBeth (1973), "Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests," *Journal of Political Economy*, 81:3, 607-636.

Fama, E. F. and G. W. Schwert (1977), "Asset Returns and Inflation," *Journal of Financial Economics*, 5:2, 115-146.

Fleming, W. H. and H. M. Soner (2006), *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, New York: Springer Verlag.

French Website, http://mba.tuck.dartmouth.edu/papes/faculty/ken.french/data_library.html.

Friedman, B. M. (1980), "Price Inflation, Portfolio Choice, and Nominal Interest Rates," *The American Economic Review*, 70:1, 32-48.

Hall, R. E. (1978), "Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence," *Journal of Political Economy*, 86:6, 971-987.

Jagannathan, R. and Z. Wang (1996), “The Conditional CAPM and the Cross-Section of Expected Returns,” *The Journal of Finance*, 51:1, 3-53.

Jagannathan, R. and Z. Wang (1998), “A Note on the Asymptotic Covariance in Fama-MacBeth Regression,” *The Journal of Finance*, 53:2, 799-801.

Jagannathan, R. and Y. Wang (2007), “Lazy Investors, Discretionary Consumption, and the Cross-Section of Stock Returns,” *The Journal of Finance*, 62:4, 1623-1661.

Julliard, C. (2007), “Labor Income Risk and Asset Returns,” London School of Economics Working Paper.

Kim, T. S. and E. Omberg (1996), “Dynamic Nonmyopic Portfolio Behavior,” *The Review of Financial Studies*, 9:1, 141-161.

Kwiatkowski, D., P. C. B. Phillips, P. Schmidt and Y. Shin (1992), “Testing the Null Hypothesis of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How Sure Are We That Economic Time Series Have a Unit Root?” *Journal of Econometrics*, 54:1-3, 159-178.

Lettau, M. and S. Ludvigson (2001a), “Consumption, Aggregate Wealth, and Expected Stock Returns,” *The Journal of Finance*, 56:3, 815-849.

Lettau, M. and S. Ludvigson (2001b), “Resurrecting the (C) CAPM: A Cross-Sectional Test When Risk Premia Are Time-Varying,” *Journal of Political Economy*, 109:6, 1238-1287.

Lintner, J. (1965), “Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets,” *The Review of Economics and Statistics*, 47:1, 13-37.

Lioui, A. and P. Poncet (2003), “Dynamic Asset Pricing with Non-Redundant Forwards,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27:7, 1163-1180.

Liu, J. (2007), “Portfolio Selection in Stochastic Environments,” *The Review of Financial Studies*, 20:1, 1-39.

Lustig, H. N. and S. G. van Nieuwerburgh (2005), “Housing Collateral, Consumption Insurance and Risk Premia: An Empirical Perspective,” *The Journal of Finance*, 60:3, 1167-1219.

Malloy, C. J., T. J. Moskowitz and A. V. Jørgensen (2009), “Long-Run Stockholder Consumption Risk and Asset Returns,” *The Journal of Finance*, 64:6, 2427-2479.

Merton, R. C. (1973), “An Intertemporal Capital Asset Pricing Model,” *Econometrica*, 41:5, 867-887.

Munk, C., C. Sørensen and T. N. Vinther (2004), “Dynamic Asset Allocation under Mean-Reverting Returns, Stochastic Interest Rates, and Inflation Uncertainty: Are Popular Recommendations Consistent with Rational Behavior?” *International Review of Economics & Finance*, 13:2, 141-166.

Parker, J. A. and C. Julliard (2005), “Consumption Risk and the Cross Section of Expected Returns,” *Journal of Political Economy*, 113:1, 185-222.

Petkova, R. (2006), “Do the Fama-French Factors Proxy for Innovations in Predictive Variables?” *The Journal of Finance*, 61:2, 581-612.

Phillips, P. C. B. and P. Perron (1988), “Testing for a Unit Root in Time Series Regression,” *Biometrika*, 75:2, 335-346.

Roll, R. (1977), “A Critique of the Asset Pricing Theory’s Tests Part I: On Past and Potential Testability of the Theory,” *Journal of Financial Economics*, 4:2, 129-176.

Ross, S. A. (1976), “The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing,” *Journal of Economic Theory*, 13:3, 341-360.

Shanken, J. (1992), “On the Estimation of Beta-Pricing Models,” *The Review of Financial Studies*, 5:1, 1-55.

Sharpe, W. F. (1964), "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *The Journal of Finance*, 19:3, 425-442.

Stulz, R. M. (1986), "Interest Rates and Monetary Policy Uncertainty," *Journal of Monetary Economics*, 17:3, 331-347.

U. S. Bureau of Economic Analysis Website, http://www.bea.gov/national.

Yogo, M. (2006), "A Consumption-Based Explanation of Expected Stock Returns," *The Journal of Finance*, 61:2, 539-580.

A Two-Factor Real Consumption CAPM

Chang, Chun-Pin and Yen-Shan Hsu

Abstract

This paper derives an inter-temporal asset pricing model in a real-term, continuous-time framework. When inflation-indexed securities are available, we are able to derive a two-factor asset pricing model in terms of consumption growth, and inflation rate change. Under the framework of this paper, we demonstrate that the theorem of S+2 funds separation applies. These funds may be chosen to be: (1) an instantaneously inflation-indexed bond, (2) a market portfolio, and (3) S portfolios having the highest correlations, respectively, with the S state variables.

Keywords: Real Consumption, Mutual Fund Theorem, Inflation-indexed Securities

JEL Classification: G10, G11, G12

Chang, Chun-Pin, Department of Finance, Asia University, No. 500, Lioufeng Rd., Wufeng, Dist., Taichung City 41354, Taiwan, R.O.C., Tel: 886-4-23323456 ext. 5481, E-mail: changip@asia.edu.tw. Yen-Shan Hsu, Department of Finance, National Chengchi University, No. 64, Sec. 2, ZhiNah Rd., Wenshan Dist., Taipei City 11605, Taiwan, R.O.C., Tel: 886-2-29393091 ext. 81246, E-mail: ysshiu@nccu.edu.tw.

Received 3 December 2009; revised 5 May 2010; accepted 9 March 2012.