

# 動態因子波動度模型與股票預期報酬： 建基在無跡卡爾曼濾波分析法與 自我相關條件異質變異模型

王睦舜、林基煌\*

## 摘要

本文提出一個動態多因子波動度模型並分別測驗此模型在橫斷面上和時間變異上對價格的影響。動態因子的產生係經由無跡卡爾曼濾波法則 (unscented Kalman filter) 及一般化自我相關條件異質變異模型，進而討論組合波動度與報酬之間的關係。相對於靜態模型，動態因子係以 Fama and French (2015) 的五因子模型來進行研究，此一特色包括了市場組合、公司規模、價值效果、營運利潤與投資類型所計算出來的預期報酬。我們提供了事後因子與落後事後因子實證研究，發現在橫斷面迴歸上有助於增進解釋力並提高在樣本內與樣本外預測對組合報酬的預測能力。我們的分析指出公司規模與帳面對市值比的分類組合會產生正面且顯著的風險溢酬，但是以市值來預期的動態因子對組合報酬的影響卻是顯著的負面效果。我們也再執行向前一期的樣本外預測並與其他模型進行配對以比較預測的正確性，此比較採用 Diebold-Mariano 測試的方法。我們發現動態因子對營運利潤溢酬和投資獲利溢酬會產生顯著的正面效果，此結果更加支持 Bali and Cakici (2008) 的理論可測性。而且我們的實證結果也進行了穩健性測試，相較於其他不同的模型設定和估計結果都要穩妥。

關鍵詞：公司特有風險、樣本外預測、無跡卡爾曼濾波、定價偏誤、  
動態因子波動度

JEL 分類代號：C23, G32, L25, M21

---

\* 兩位作者分別為聯絡作者：王睦舜，開南大學財務金融學系副教授，33857 桃園市蘆竹區開南路 1 號，電話：03-3412500 轉 6123，E-mail: [sunrise034@yahoo.com.tw](mailto:sunrise034@yahoo.com.tw)。林基煌，開南大學財務金融學系教授，33857 桃園市蘆竹區開南路 1 號，電話：03-3412500 轉 1702，E-mail: [chlin@mail.knu.edu.tw](mailto:chlin@mail.knu.edu.tw)。作者感謝匿名審查委員、編輯委員，中國中央財經大學何眾志教授、北京大學李連發教授所提供之寶貴意見與建議。然文中若有任何錯誤，當屬作者之責任。

投稿日期：民國 104 年 1 月 22 日；修訂日期：民國 104 年 5 月 26 日；  
接受日期：民國 105 年 9 月 2 日。

經濟研究 (Taipei Economic Inquiry), 53:1 (2017), 129-179。  
臺北大學經濟學系出版

## 1. 前言

Fama and French (1993, 1996) (FF) 提出三因子模型被學界廣為應用在資產評價上，近來許多文獻檢討 FF 三因子模型的精緻性，如 Simin (2008) 運用事先預測法評估其效率較設立簡單的指標為差。He et al. (2010) (HHL) 提出動態效果下的定價模型，探討「風險調整的定價模型」(risk-adjusted pricing model) 與「偏誤調整的定價模型」(bias-adjusted pricing model) 兩者在樣本內的脈絡，說明後設 (ex post) 的動態因子不管是樣本內 (in-sample) 或樣本外 (out-of-sample) 預測都有助於強化 FF 三因子模型的定價模型。HHL 是以同時和已實現的過去報酬兩者結合所形成的線性組合來捕捉整個已知的資訊集，動態因子模型的特色是結合了橫斷面與時間序列模型的特色，有別於 FF 三因子模型或其他靜態因子。但是 HHL 僅能補強 FF 三因子所未能抓到的動能效果並證實規模效應的事前因子較能做為資訊不確定的代理變數，HHL 宣稱透過卡爾曼濾嘴分析法找出潛在的動態因子，可以增進 FF 三因子模型的解釋力和預測力，因此運用樣本外的預測找到統計顯著性以及經濟意義上的顯著性。He et al. (2015a) (HZZa) 及 Fama and French (2012) 則運用多國資料討論動態因子與納入動能因子之後三因子模型對股價報酬的解釋能力。HZZa 解釋動態因子定價模型較具顯著的因子風險溢酬，較高的實證能力和較低的定價偏誤統計，而且也能修正 Lewellen et al. (2010) (LNS) 所論說的模型設定錯誤及 Gospodinov et al. (2014) 所質疑的樣本分布不確實 (spurious inference) 的現象。

風險與報酬之間的關聯性也是資產評價上被討論的核心問題，而這個問題的已知文獻，有從總合市場的角度運用時間數列來討論的，也有從個別股票的角度運用時間數列與橫斷面的角度來討論公司特有風險波動度對預期報酬之間的關聯性。他們所得到的實證結果並不一致，像是 Ang et al. (2006, 2009) 討論公司特有風險對權益

市值為指數所計算出的平均報酬率的影響，他們認為處在景氣衰退的時候，股價劇烈波動，而在空頭市場中，高波動度的股票其報酬率通常較低，其風險溢酬較小，他們認為市場報酬與市場波動度所建立的兩因子模式相對資本資產評價模型可以減少價格錯誤。<sup>1</sup>

據本文所知，公司特有風險波動度對預期報酬率或已實現報酬率的文獻，不管是從橫斷面的角度探討 (Ang et al., 2006) 或是運用指數型一般化自我迴歸異質條件變異數模型 (exponential generalized autoregressive conditional Heteroskedastic model, EGARCH) 的條件變異數，做為公司特有風險波動度 (French et al., 1987; Fu, 2009)，以及從非線性角度來探討波動度門檻對報酬率的影響 (Angelidis and Tessaromatis, 2009; Wang, 2013)，卻屬於靜態因子模型，實證結果有著缺乏樣本外預測的能力 (Campbell and Thompson, 2008; Simin, 2008) 及以總合市場波動度的估計恐有漏失組合解釋能力的缺點 (Hammoudeh et al., 2009; Han et al., 2013)。Cont (2001) 特別指出金融資產的報酬有波動度群聚的現象，這是因為前後期自我相關的影響，尤其是股票報酬會受到未預期因素的宣示而突然大幅度波動 (Arshanapalli et al., 2013)，因此計算時間數列的最適落後期效果或從橫斷面依循 HHL 的模型建立動態因子，頗能減少模型設定偏誤的詬病。Bauer and Vorkink (2011) 認為波動度自我迴歸的模型設定會遇到一些難題，像是最適落後期可能會很長，且波動度擴散下，標準差並不服從常態分配，或殘差項並不獨立，深受更多因素的相互干擾，必須運用主成分分析法將影響較小的因素排除。為了解決上述

---

<sup>1</sup> Goyal and Santa-Clara (2003) 採用間接法將個別公司的總合特有風險與整體股市報酬之間的關係發現在 1963 年 8 月到 1999 年 12 月之間為顯著正向效果。Bali et al. (2005) 和 Wei and Zhang (2005) 以美國整體股市為實證對象，發現個別公司的特有風險與市場報酬之間關聯性並不顯著。Guo and Savickas (2008) 則採用 G7 探討總合特有風險與整體股市報酬之間的關係，其中，英、美兩國為負向效果，日、法等其他國家則沒有明顯地系統性關係，King et al. (1994) 的研究也指出有八個國家的總合市場風險與預期報酬之間的關係為正向效果。

缺點，He et al. (2015b) (HZZb) 率先建立多因子公司特有風險波動度模型對股票預期報酬在橫斷面與時間數列上的影響，得出規模效果與價值因素的波動度對股價報酬有顯著的影響，且進行不同模型的績效比較。HZZb 雖然對多因子波動度模型有所貢獻，但是運用卡爾曼濾波分析法建構後設因子做為波動度的換算子似乎有些陳舊，且文章中缺乏完善的脈絡解釋橫斷面迴歸上，多因子波動度對預期報酬的影響，且內容有些龐雜，組織體系相當紊亂。自從 Fama and French (2015) 發表五因子模型理論後，利用動態因子建立波動度模型討論對預期報酬率的影響，也是相當重要的議題。

但本文的做法明顯與 HZZb 不同，乃是參考 Fu (2009) 的方式，運用 EGARCH 的條件變異方程式建構一個有前後期關係矩陣的條件變異方程式做為波動度模型，再以波動度與共變數關係矩陣衡量對預期報酬矩陣的動態調整影響。其次是運用無跡卡爾曼濾波分析法 (unscented Kalman filter, UKF) 取代傳統卡爾曼濾波法，預期後設因子，由後設的動態因子運算出一個動態因子波動度模型，進而解釋股票報酬的橫斷面變異。在以 FF5 因子為架構下，探討 1970 年 7 月到 2015 年 6 月計 540 個月資料中，條件變異的方程式所建構的五因子波動度包括市場組合、價值效果、公司規模、營運利潤與投資類型對預期報酬的解釋能力。

其次，Bali and Cakici (2008) 建立買進高特有風險波動度並同時賣出低特有風險波動度的套利組合，發現這個組合的波動度會影響調整後 FF3 因子模式的超常報酬，但是這個影響無法解釋前述資訊外溢效果。本文為減輕潛在的模型設定錯誤的問題，運用 FF5 動態因子波動度模型，建立  $10 \times 10$  的組合，其結果相較於 LNS 認為運用  $5 \times 5$  再加 30 個產業指數報酬（55 個投資組合），更能減輕極端偏離值所造成訂價偏誤的現象。

FF5 因子靜態模型係 Novy-Marx (2013) 指出可以用來解釋何謂異常報酬的，除了市值、公司規模與成長機會所組成的 FF 三因子外，與營運利潤及投資類型有關，相對於 FF3 或 FF4（FF3 加上動

能所組成)，FF5 (FF 加上營運利潤與投資類型) 較具解釋力。基本上認為短期報酬率與內部報酬率有關，但內部報酬率在短期大多是一致的，也就不會產生異常報酬，因此無法從 FF3 或 FF4 發現獲利能力與投資類型所產生的未來預期報酬 (Aharoni et al., 2013)，這個論點指出了運用 FF3 建立的多因子波動度模型對預期報酬率的實證的缺陷。

本文的貢獻具體說明如下：運用 FF5 因子模型，依據 HHL 與 HZZa 的動態因子設計，與 HZZb 的多因子波動度的模型，建構動態因子波動度 (變異數與共變數方程式)，討論對預期報酬率之間的關聯性。為提高本文的研究價值，針對新進 FF5 因子所提出的創新活動所產生的異常報酬：營運利潤 (operating profitability) 與投資群組 (investment patterns)，討論在 100 個組合與 120 個組合的不同條件下，利用橫斷面資料所能解釋的報酬程度。本文運用 FF5 因子組合報酬分成  $2 \times 2$ 、 $2 \times 3$  與  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  三個分組，探討動態因子與動態因子波動度對 100 及 120 個組合報酬的影響。其二，參考 HZZb 與 Wang (2013) 的做法，預期報酬的估計加計動能 (moment) 因子、反轉 (reversal) 因子 (Kang et al., 2011) (KKLM)，再以 FF5 動態因子波動度進行橫斷面測試，本文以相關係數做適合度比較。其三，運用 GARCH(1,1) 估計變異數方程式，討論 100 個組合中，波動度對報酬率的影響，但僅表列「穩健獲利減獲利不佳」的組合 (difference between the returns on diversified portfolios of stocks with robust and weak profitability, RMW) 與投資類型「保守減進取」(difference between conservative and aggressive, CMA) 兩個組合因子，M 代表減的意思。另外三個因子僅討論與 HZZb 實證結果之異同。其四，進行樣本外預測，執行 Diebold-Mariano (DM) 檢定 (Diebold and Mariano, 2002)，以了解動態因子波動度的預測能力是否優於歷史月報酬率，從而解釋動態 FF5 模型所建立的公司特有風險波動度，較過去作法所估計出的波動度為優。

## 2. 模型設定

### 2.1 從 HHL 及 HZZa 建構 FF5 動態因子模型

本文參考 HHL 及 HZZa 的多因子動態模型，運用 FF5 因子所構造的分類法，分成  $2 \times 2$ 、 $2 \times 3$  及  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  等三組建構預期報酬率，本文由 FF5 靜態模型發展出動態因子模型，主要以公司規模分為大小 (*SB*) 兩組，在  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  的組合中，帳面價值對市值比 (*book to market value, BTM*) 高跟低兩組 (*HL*)、營運利潤與分為穩與弱 (*RW*) 兩類、投資類型分為保守與進取 (*CA*) 兩類，形成報酬率的組合為： $R_t = [R_{SL,t}, R_{SH,t}, R_{SR,t}, R_{SW,t}, R_{SC,t}, R_{SA,t}, R_{BL,t}, R_{BH,t}, R_{BR,t}, R_{BW,t}, R_{BC,t}, R_{BA,t}]$ ，共有 *SL, SH, SR, SW, SC, SA, BL, BH, BR, BW, BC* 與 *BA* 等 12 個組合，則在  $t$  月所形成的非向平均數集中的異常報酬向量為以下(1)式：

$$\begin{bmatrix} R_{SL,t} \\ R_{SH,t} \\ R_{SR,t} \\ R_{SW,t} \\ R_{SC,t} \\ R_{SA,t} \\ R_{BL,t} \\ R_{BH,t} \\ R_{BR,t} \\ R_{BW,t} \\ R_{BC,t} \\ R_{BA,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \beta_{1,4} & \beta_{1,5} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \beta_{2,4} & \beta_{2,5} \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & \beta_{3,3} & \beta_{3,4} & \beta_{3,5} \\ \beta_{4,1} & \beta_{4,2} & \beta_{4,3} & \beta_{4,4} & \beta_{4,5} \\ \beta_{5,1} & \beta_{5,2} & \beta_{5,3} & \beta_{5,4} & \beta_{5,5} \\ \beta_{6,1} & \beta_{6,2} & \beta_{6,3} & \beta_{6,4} & \beta_{6,5} \\ \beta_{7,1} & \beta_{7,2} & \beta_{7,3} & \beta_{7,4} & \beta_{7,5} \\ \beta_{8,1} & \beta_{8,2} & \beta_{8,3} & \beta_{8,4} & \beta_{8,5} \\ \beta_{9,1} & \beta_{9,2} & \beta_{9,3} & \beta_{9,4} & \beta_{9,5} \\ \beta_{10,1} & \beta_{10,2} & \beta_{10,3} & \beta_{10,4} & \beta_{10,5} \\ \beta_{11,1} & \beta_{11,2} & \beta_{11,3} & \beta_{11,4} & \beta_{11,5} \\ \beta_{12,1} & \beta_{12,2} & \beta_{12,3} & \beta_{12,4} & \beta_{12,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{MKT,t} \\ D_{SIZE,t} \\ D_{BTM,t} \\ D_{OP,t} \\ D_{INV,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{SL,t} \\ \omega_{SH,t} \\ \omega_{SR,t} \\ \omega_{SW,t} \\ \omega_{SC,t} \\ \omega_{SA,t} \\ \omega_{BL,t} \\ \omega_{BH,t} \\ \omega_{BR,t} \\ \omega_{BW,t} \\ \omega_{BC,t} \\ \omega_{BA,t} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中， $D_t = [D_{MKT,t}, D_{SIZE,t}, D_{BTM,t}, D_{OP,t}, D_{INV,t}]'$  分別代表市場組合 (MKT)、公司規模 (SIZE)、價值效果 (BTM)、營業利潤 (OP) 與投資類型 (INV) 的動態因子。

此外， $2 \times 3$  的組合是以公司規模分為兩組，價值效果、營運利潤與投資類型根據 NYSE 市值的第 30 分位數與第 70 分位數分為 3 組，個別組成 6 個投資組合，而  $2 \times 2$  僅只有規模與價值效果、或與營運利潤或與投資類型個別組成四個報酬率投資組合，其向量與(1)式相似，不再贅述。HHL 與 HZZa 運用潛在變數，將帳面市值比與公司規模組成六個投資組合報酬，運用卡爾曼濾波法則建構報酬的可預測度 (Brandt and Kang, 2004; Pástor and Stambaugh, 2009; Rytchkov, 2012)，本文在波動度的衡量上，除了運用 GARCH 模型的條件變異數方程式來代表過去波動度和報酬創新的函數外，另外一種隨機波動度模型 (Shephard, 2005; Li, 2013) 被稱為 UKF 乃是假設波動度因子無法被觀察到且被多種隨機過程所驅動，UKF 是一種很有效的演算法，運用概似估計法來處理非線性最佳化的濾波問題 (Särkkä, 2007)，卡爾曼濾波法是一種能從受雜訊影響的量測值中，有效估測線性動態系統的狀態。在財務數據多為時間數列而非線性的條件下，UKF 可以增進預測績效 (Huang, 2008)。McCausland et al. (2011) 提出 UKF 在財務波動度上的應用，Li (2013) 則用來討論股價與選擇權的動態波動度，Yin and Li (2014) 探討動態匯率調整的波動度對各國橫斷面現貨報酬的影響。由於公司特有風險波動度本身是一個極高度地非線性狀態函數，因此不適用傳統的卡爾曼濾波法，反而是 UKF 本身具有白色雜訊 (white noise) 的高斯分配 (Gauss distribution)，適合運用於動態估計法，且 UKF 本身可以增進估計效率和穩健性，並降低計算成本 (詳細的介紹請參考附錄)。UKF 是從已知報酬的有限集合去分離未觀察到的因子，捕捉真實平均值和非線性過程的共變數來建立一個因素負荷矩陣，運用 UKF 先要進行無跡轉換 (scaled unscented transformation)，令  $L = L_x + L_\omega + L_v$ ， $L$

為狀態維度， $\omega$  為可觀測到的白色噪音， $\nu$  為狀態噪音，則  $D_{t-1}^e = [D_{t-1} \ \omega_{t-1} \ \nu_{t-1}]'$  且其平均數與變異數為  $\hat{D}_{t-1} = E[D_{t-1}^e]$ ，

$$\delta_{t|t-1}^e = \begin{bmatrix} \delta_{t|t-1}^D & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{t-1}^\omega & \\ 0 & 0 & \sigma_{t-1}^\nu \end{bmatrix}, \quad (2)$$

如此可以將 (1) 式轉換成 (3) 式：

$$\begin{bmatrix} D_{MKT,t} \\ D_{SIZE,t} \\ D_{BTM,t} \\ D_{OP,t} \\ D_{INV,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{MKT} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{SIZE} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{BTM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_{OP} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_{INV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{MKT,t-1} \\ D_{SIZE,t-1} \\ D_{BTM,t-1} \\ D_{OP,t-1} \\ D_{INV,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{MKT,t} \\ \nu_{SIZE,t} \\ \nu_{BTM,t} \\ \nu_{OP,t-1} \\ \nu_{INV,t-1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\text{且 } \hat{D}_{t|t-1} = \sum_{i=0}^{2L} \omega_i^{(m)} D_{i,t|t-1}^D, \quad \delta_{t|t-1}^D = \sum_{i=0}^{2L} \omega_i^{(c)} (D_{i,t|t-1}^D - \hat{D}_{t|t-1}) (D_{i,t|t-1}^D - \hat{D}_{t|t-1})'$$

經過計算後，可以取得做為狀態  $D$  在  $t$  時的事後平均數與事後共變數  $\delta_{t|t}^D$ ，且  $t=1, 2, \dots, T$ 。 $\phi$  係以五因子做為時間數列模型的預測值，所能呈現的自我相關係數進一步求得的對角線常數向量，以  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  投資組合為例，

$$\omega_t = [\omega_{SL,t}, \omega_{SH,t}, \omega_{SR,t}, \omega_{SW,t}, \omega_{SC,t}, \omega_{SA,t}, \omega_{BL,t}, \omega_{BH,t}, \omega_{BR,t}, \omega_{BW,t}, \omega_{BC,t}, \omega_{BA,t}]'$$

是 12 個投資組合中個別報酬的向量。

傳統估計公司特有波動度的方式，如果是從橫斷面角度探討，如 Ang et al. (2006)，他們運用 Black and Scholes (1973) 模型估算隱含波動度做為風險載入因子的代理變數。以及根據 FF3 因子靜態模型求出公司特有波動度之殘差項的標準差，使用的是上一個月的月超常報酬來估計 (Ang et al., 2009)。Bali et al. (2005)、Bali and Cakici (2008) 則採用價值加權法與市值加權法，其中波動度仍與個股報酬的變異數有關。本文則是根據 FF5 因子動態模型在橫斷面上運用 UKF 法估計。在時間數列上仿效 Fu (2009) 的做法，估計條件變異數



方程式。<sup>2</sup>

根據 Stock and Watson (2005) 與 HHL 的文獻，我們需先檢定組合報酬的預測誤差的模型設定，證實動態因子是不偏估計值。(4) 式係以落後期六期報酬率所建立的組合報酬率，進而求取向前一期預測誤差的預期值，如下：

$$e_{i,j} = c_0 + \sum_{s=1}^6 \gamma_{i,t-s} R_{i,t-s} + \sum_{s=1}^6 \theta_{i,t-s} e_{i,t-s} + \zeta_{i,t} \quad (4)$$

透過 GARCH 程序，將求解出  $D_{i|t-1}$  與  $D_{i|t}$  的動態因子之條件期望值與條件變異數 ( $H_{i|t-1}$ )，令  $v_t = H_t^{1/2} \Gamma_t$ ， $H_t$  是  $v_t$  的條件共變數矩陣，用來代表 FF5 因子模型組合報酬的變異數，而且在本文將條件共變數予以一般化，且  $\Gamma_t$  為正規化殘差，是服從標準常態分配，令  $v_t = [v_{MKT,t}, v_{SIZE,t}, v_{BTM,t}, v_{OP,t}, v_{INV,t}]'$ ，參考 HZZb 的做法，對於一個對角矩陣  $H_t$ ，其每一個對角成分  $\alpha_{MKT}$ ， $\alpha_{SIZE}$ ， $\alpha_{BTM}$ ， $\alpha_{OP}$ ， $\alpha_{INV}$  可形成一個 GARCH 程序：

<sup>2</sup> Fu (2009) 的 EGARCH( $p, q$ ) 模型，其條件變異數方程式如下：

$$\ln \sigma_{i,t}^2 = a_i + \sum_{i=1}^p b_{i,t} \ln \sigma_{i,t-1}^2 + \sum_{k=1}^q c_{i,k} \left\{ \theta(\varepsilon_{i,t-k} / \sigma_{i,t-k}) + \gamma \left[ |\varepsilon_{i,t-k} / \sigma_{i,t-k}| - (2/\pi)^{1/2} \right] \right\}。$$

Fu (2009) 以美國股市的個別公司為對象，在預期報酬率的估計上是以 FF3 因子模式所建立的，而個別公司的特有風險預測是在考量誤差項為指數自我相關條件的變異效應。Fu (2009) 最後估計出 8 個條件變異數，再選出 Akaike 資訊條件 (Akaike information criterion, AIC) 的最低值做為預期特有風險。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} H_{MKT,t} \\ H_{SIZE,t} \\ H_{BTM,t} \\ H_{OP,t} \\ H_{INV,t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_{MKT} \\ \omega_{SIZE} \\ \omega_{BTM} \\ \omega_{OP} \\ \omega_{INV} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{MKT} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{SIZE} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{BTM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{OP} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{INV} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_{MKT,t-1}^2 \\ v_{SIZE,t-1}^2 \\ v_{BTM,t-1}^2 \\ v_{OP,t-1}^2 \\ v_{INV,t-1}^2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} \gamma_{MKT} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{SIZE} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{BTM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{OP} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{INV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{MKT,t-1} \\ H_{SIZE,t-1} \\ H_{BTM,t-1} \\ H_{OP,t-1} \\ H_{INV,t-1} \end{bmatrix}, \quad (5)
\end{aligned}$$

(5)式所建構的  $H_t$  對角矩陣可根據 FF5 因子模型，列示於 (6) 式與 (7) 式，

$$\tilde{R}_t = BD_{MKT,t} + BD_{SMB,t} + BD_{HML,t} + BD_{RMV,t} + BD_{CMA,t} + \omega_t, \quad (6)$$

$$D_t = \phi D_{t-1} + v_t, \quad (7)$$

此處  $B$  為動態因子的動態迴歸係數， $\phi$  是自我迴歸係數所形成的對角矩陣，且令  $\omega$  是組合報酬的波動度向量，若  $\omega_t$  為常態分配且  $\omega_t$  與  $v_t$  之間相互獨立，則

$$E[\omega_t \omega'_\tau] = \begin{cases} \Delta & \text{for } t = \tau, \\ 0 & \text{for } t \neq \tau, \end{cases} \quad (8)$$

如此，

$$E[\omega_t v'_\tau] = 0 \text{ for all } t \text{ and } \tau, \quad (9)$$

則為上述 (6) 式與 (7) 式所設計出的  $12 \times 12$  對角共變數矩陣，亦即  $\Delta = \text{diag}[\sigma_{MKT}^2, \sigma_{SIZE}^2, \sigma_{BTM}^2, \sigma_{OP}^2, \sigma_{INV}^2]$  而條件變異數方程式形成為

$$H_{t|t-1} = \omega + Av_{t-1}^2 + \Gamma H_{t-1}, \quad (10)$$

上式中  $H_{t|t-1}$  是一個以資訊集合為基礎所產生的與時俱變的條件變

異數，且  $\omega$  為動態因子所產生的非條件變異數，而  $A$  與  $\Gamma$  為對角共變係數矩陣，此處 GARCH 模型與 UKF 不同之處在於  $v$  是無法觀測的白噪音，UKF 預測  $v_t$  經過多期轉換後成為動態後設因子，根據 Harvey et al. (1992) 的觀點， $\omega$  應設限在  $\alpha_j + \gamma_j < 1$  的穩態條件下，且  $j$  為市場組合、公司規模、價值效果、獲利能力與投資類型等五個因子。

## 2.2 公司特有風險與預期報酬之迴歸式

由本文所計算出的動態因子波動度與 FF5 動態因子模型之間的關係，建立如 (11) 式：

$$E[R_{i,t} | I_{t-1}] = \hat{R}_i + B_i^0 D_{t|t-1} + B_i^H H_{t|t-1} \quad (11)$$

則在假設  $E(\varepsilon_{i,t} | I_{t-1}) = 0$  及  $E(\varepsilon_{i,t} | I_{t-1}) = 0$  的條件下，

$$\hat{R}_{i,t} = E[R_{i,t} | I_{t-1}] + B_i^1 (D_t - D_{t|t-1}) + \varepsilon_{i,t} \quad (12)$$

如此， $B_i^1 = [\beta_{MKT}^1, \beta_{SIZE}^1, \beta_{BTM}^1, \beta_{OP}^1, \beta_{INV}^1]$ ，構成五個載入因子而同時產出常數項矩陣的係數值，(12) 式是 HHL 的動態因子模型，

$$B_i^0 = [\beta_{MKT}^0, \beta_{SIZE}^0, \beta_{BTM}^0, \beta_{OP}^0, \beta_{INV}^0] \quad (13)$$

(11) 式是以 Ang et al. (2006) 與 Adrian and Rosenberg (2008) 在探討公司特有風險波動度與預期報酬之間關係所建立的橫斷面迴歸，進而由本文建構的動態因子波動度模型， $B_i^H = [\beta_{MKT}^H, \beta_{SIZE}^H, \beta_{BTM}^H, \beta_{OP}^H, \beta_{INV}^H]$ 。由 (11) 式與 (12) 式合併後，令  $B_i^* = B_i^0 - B_i^1$ ，得 (13) 式：

$$\hat{R}_{i,t} = B_i^* D_{t|t-1} + B_i^1 D_{t|t} + B_i^H H_{t|t-1} + \varepsilon_{i,t} \quad (13)$$

## 2.3 以樣本外預測進行穩健性測試

許多文獻都指出價值比率對預期報酬有顯著影響，這些價值比率包括股利對市價比 (Dow, 1920; Fama and French, 1988, 1989)、本

益比 (Campbell and Shiller, 1988; 1998)、帳面價值比 (Kothari and Shanken, 1997; Pontiff and Schall, 1998)、名目利率 (Fama and Schwert, 1977; Campbell, 1987; Breen et al., 1989; Ang and Bekaert, 2007)、通貨膨脹率 (Nelson, 1976; Fama and Schwert, 1977; Campbell and Vuolteenaho, 2004)、期間和違約價差 (Campbell, 1987; Fama and French, 1989)、公司理財活動 (Baker and Wurgler, 2000; Boudoukh et al., 2007)、消費支出對實質財富比率 (Lettau and Ludvigson, 2001) 與股票市場波動度 (Guo and Savickas, 2008)，這些文章都說對預期報酬有顯著的影響，不過多是進行樣本內迴歸測試。Welch and Goyal (2008) 重測許多運用線性迴歸及時間數列的資料，發現很多樣本內的模型不再顯著或存在著模型設定偏誤的問題，他主張建構樣本外測試以做為樣本內實證之後的穩健性測試，Welch and Goyal (2008) 與 Campbell and Thompson (2008) 將預測變數與取得 20 年以上的高品質全部報酬率的歷史資料，拿來運用樣本外迴歸測試，發現結果未必顯著，認為公司特有風險波動度與股價報酬的關係仍需限制預測評估的期間以增進樣本外預測迴歸的變數解釋力。Simin (2008) 運用事先預測法評估模型績效，避免無謂的因素偏誤 (Kan and Zhou, 1999, 2001)，橫斷面比較時所發生的變數誤差問題 (errors in variables problem)，(Kim 1995) 以及協助處理資料窺探 (data snooping) 偏差 (Lo and MacKinlay, 1990)，在條件狀態下弱工具測試 (Foster et al., 1997) 並避免使用簡單的相關係數錯導預測的衡量，他發現平均歷史報酬用來預測市場和個股報酬較利用 FF3 迴歸式來預期報酬為優。

Rapach et al. (2010) 也是將許多經濟變項結合起來，進行樣本外預測討論對權益溢酬預期的影響，他們分析權益市場溢酬與價值比率之間的關聯性問題及探討合適的可與總體經濟連結的變數，實證結果是發現經濟變項整體上優於運用歷史平均報酬來做超常報酬的預測。認為總體經濟變數對權益報酬有影響且進行樣本外預測以求得穩建性的文獻漸漸增加，如 Ang and Bekaert (2007)、Hjalmarsson (2010)、Henkel et al. (2011)、Cochrane (2011) 以及 Neely et al. (2014)

等等，因此本文除了運用多因子條件變異數估計波動度以探討對股價報酬之間的關係，也要進行樣本外預測以求結果的穩健性。

本文的樣本外預測主要是施行 DM 檢定，用以檢定兩組預測模型是否一樣好，在歷史報酬  $R_{i,t}$  之外，另有在  $t$  期的預估報酬  $\hat{R}_{i,t}$ ，且  $e_{i,t}^2 = (R_{i,t} - \hat{R}_{i,t})^2$ ，為預測誤差的平方，而損失函數為預測誤差的函數，即  $g(R_{i,t} - \hat{R}_{i,t}) = g(e_{i,t}) = \sum_{t=1}^T (e_{i,t})^2$ 。DM 檢定統計量具有標準常態分配的特性，且令其相對應的誤差序列分別為  $e_{1,t}$  與  $e_{2,t}$ ，可以寫成 (14) 式：

$$DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\frac{2\pi\hat{f}_d(0)}{T}}}, \quad (14)$$

其中， $\bar{d} = \sum_{t=1}^T [g(e_{1,t}) - g(e_{2,t})] / T$  為一般以損失函數的均數， $N$  為觀察值個數， $\hat{f}_d(0)$  代表損失函數在頻率等於零時光譜密度 (spectral density)  $[g(e_{i,t}) - g(e_{j,t})]$  一致性估計式， $2\pi/T$  是一個完整的比較區間所需要的時間長度。DM 檢定是以  $f_d(0)$  進行序列相關的配對檢定，在自我共變數的累積下，縱使序列相關很弱，損失差分仍有可能存在，利用異質性自我相關穩健的標準誤 (heteroscedasticity and autocorrelation consistent, HAC) 所得到的  $t$  統計量就是 DM 統計量。

### 3. 實證結果

#### 3.1 描述性統計與模型設定

本文資料庫選取自 K. R. French 網站的 Fama-French 研究因子與研究組合，<sup>3</sup> K. R. French 網站的資料取材自紐約證交所 (New York Stock Exchange, NYSE)、美國證交所 (American Stock Exchange,

<sup>3</sup> Kenneth, R. French (2016), data library, <http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/index.html>.

AMEX) 或全國券商自動報價協會 (National Association of Securities Dealers Automated Quotations, NASDAQ) 等證券交易市場，由 CRSP 資料庫所選用的上市公司，本文所需要的無風險資料庫也是來自 French 圖書館所選用的 T-bill 利率，我們採用三個月 T-bill 代理時間序列的無風險利率、12 個月 T-bill 代理橫斷面的無風險利率 (Fama and French, 2006)。由於 K. R. French 的資料圖書館是編好後公開提供對資產評價有興趣的專家學者們自由摘取，其橫斷面資料並沒有明確說明，本文查找其橫斷面資料來源，係根據 Fama 與 French 的公開說明書，資料樣本起始於 1929 年 6 月，其中帳面市值比的資料載入 339 家公司，1953 年 6 月有 756 個 NYSE 公司，加入 COMPUSTAT 自 1954 年開始的資料有 834 家 NYSE 公司，1975 年為 780 個，1994 年為 1,308 個，直到 1996 年 6 月則包含了 NYSE, AMEX 及 NASDAQ 共 4,562 家樣本 (Davis et al., 2000)，其中非金融與公共事業的樣本到了 1997 年為 5,670 家，但 1999 年時減少到 5,113 家 (Fama and French, 2001)，2004 年為 3,858 家 (Fama and French, 2006)，2010 年為 3,600 個樣本 (Belo et al., 2014)。

本文建構 FF 5 因子動態模型，將市場組合、公司規模、價值效果、營運利潤與投資類型等五個因子分成個別 25 個組合報酬 (Fama and French, 2015)。表 1 之分表 A 為扣除無風險利率的超額報酬，他是由公司規模所分成的五組與帳面市值比所形成的價值加權的組合。此組合運用 NYSE 的市場籌碼區分點的設計，所形成的因子組合是以 CRSP 資料庫所收納的 NYSE、AMEX 及 NASDAQ 中的證券編號 10 與 11 來進行。在表 1 分表 A 中，*BTM* 比的這一欄中，小公司股票到大公司股票每月平均超常報酬（減掉無風險利率）很典型地是自小逐群擴增（規模效果）。*BTM* 越低代表成長機會越高，除了最小規模這一群平均報酬較低外，其他各組的平均報酬與公司規模之間並沒有明確的關聯性。平均報酬與 *BTM* 之間的關係被稱為價值效果。在每一個公司規模的行中，平均報酬隨 *BTM* 逐步增加，這是因為小規模公司的價值效果越高，分表 A 顯示平均超常報酬由每月

0.85% 增加到每月 1.65%，高 *BTM* 那一欄中，大公司規模的平均超常報酬由 0.89% 漲到 1.21%。表 1 分表 B 列示的是 25 個價值加權的組合之平均超常報酬，其組合形成的方式是由公司規模乘上動能因子。分表 A 與分表 B 的資料為 1926 年 7 月到 2015 年 6 月，計 1,089

表 1 描述性統計

	低	2	3	4	高
A.公司規模-帳面市值比					
小	0.85	0.98	1.29	1.45	1.65
2	0.90	1.19	1.29	1.35	1.52
3	0.99	1.18	1.23	1.28	1.43
4	1.00	1.02	1.15	1.24	1.32
大	0.89	0.91	0.95	0.97	1.21
B.公司規模-營運利潤					
小	0.91	0.66	0.63	0.63	0.20
2	1.43	1.16	0.92	0.92	0.76
3	1.63	1.25	1.09	1.09	0.86
4	1.65	1.47	1.22	1.22	1.04
大	1.90	1.70	1.55	1.55	1.23
C.公司規模-投資類型					
小	1.41	1.46	1.34	1.28	0.84
2	1.31	1.23	1.39	1.26	0.81
3	1.28	1.30	1.44	1.40	0.94
4	1.30	1.23	1.23	1.22	0.88
大	1.19	1.07	1.08	1.13	0.73

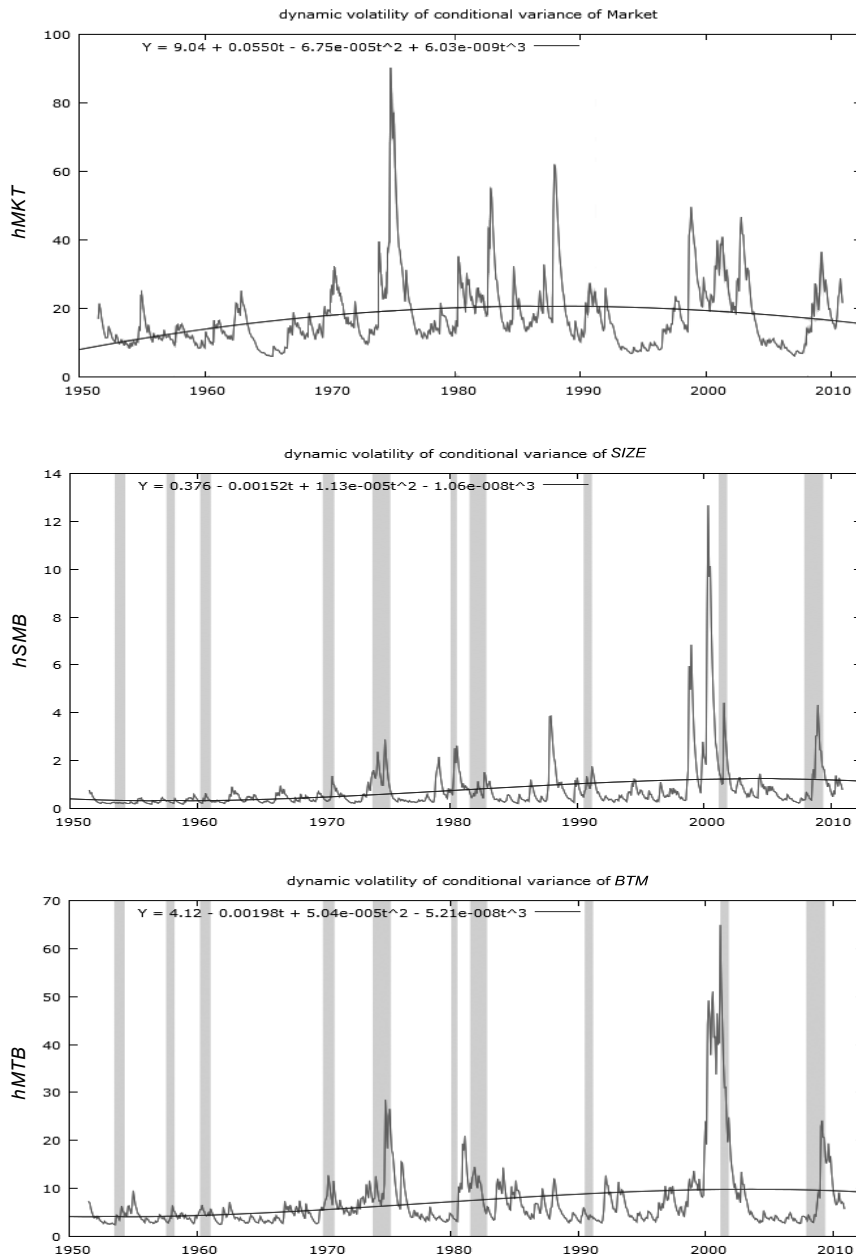
資料來源：K. R. French 網站，該資料由 CRSP 資料庫中取得。

說明：每月平均組合超常報酬是依照帳面市值比與公司規模進行排序，該資料起於 1926 年 7 月到 2015 年 6 月，合計 1,089 個月。資料做法是在每一年六月底將股票分配到五個群體（從小到大），其分配標準是運用 NYSE 市場籌碼區分點的設計，同時又分配五個群組（從低到高），也是使用 NYSE 市場籌碼區分點的設計。這樣的交集可找到 25 個價值加權的投資組合（Size-BTM 組合）。此處是指每一個會計年度  $t-1$  年底的帳面價值， $M$  是會計年度  $t-1$  年年底的市值。本表顯示的是減除 3 個月 T-bill 做為代理的無風險利率的超常報酬。

個月，分表 C 則為 1970 年 7 月到 2015 年 6 月，合計 540 個月。公司規模-營運利潤的形成方式與公司規模 *BTM* 是一樣的，從橫向的行可以看出，自低營運利潤到高營運利潤的平均超常報酬是遞減的，而小公司到大公司的營運利潤，最低 *OP* 與最小規模的公司組是 0.91%，最高 *OP* 與最大規模是 1.23%，最高 *OP* 與最小規模的公司組是 0.20%，最低 *OP* 與最大規模的投資組合是 1.9%。表 1 之分表 C 時距為 1970 年 7 月到 2015 年 6 月所紀錄之各組平均報酬與 Fama and French (2015) 論點相同，也就是再各組平均報酬上有極大的差異，小規模組合的平均報酬大於大規模組合的平均報酬，由最小最低組合的 1.41 到最大最高組合的 0.73，這說明大公司可能會投資缺乏效率的專案計畫而使得獲利能力不佳。

由於動態條件變異數所代表的動態波動度不容易用文字描述，我們繪製出 1926 年 7 月到 2013 年 11 月的波動情況，分成  $\sigma_{MKT}$ 、 $\sigma_{SIZE}$  與  $\sigma_{BTM}$  3 張圖，發現大波動與小波動交錯呈現的情形，而市場因子動態波動度的高峰期，檢視圖 1 與資料，大略都出現在幾個特殊事件上，如 1974 年的石油危機、1987 年的黑色星期五的股市崩盤、2000 年的網路股泡沫化與 2007 年的次貸危機。這說明了不確定性所造成的過度波動會讓市場因子的動態波動變得很大，可是以 *SIZE* 所設算的動態波動因子在 2000 年的波幅遠大於其他期間，大多數的時候，*SIZE* 的動態波動因子也沒有像 *MKT* 動態波動因子劇烈。文獻上指出當投資人處在恐慌時，特有波動度對個股已實現報酬的影響為負向效果 (Peterson and Smedema, 2011)。至於 *BTM* 的動態波動在 2000 年處於網路股泡沫期間，卻高於 *MKT*，合理的解釋如 Bergbrant (2010) 所言，小型股的交易成本高於大型股，所以小型股所需要的報酬率會高於大型股，且陳家彬等 (2010) 討論低價股 (penny stock) 與非低價股的特有風險及普通股與非普通股對股票報酬橫斷面的關係，這說明了規模效果與成長機會對股價報酬也存在著影響，如此略了解 *BTM* 的波動在網路股泡沫化期間高於 *MKT*，但其他期間都能穩定正向波動。





資料來源：K. R. French 網站。

圖 1 利用卡爾曼濾波法求出組合條件變異方程之動態波動度

HHL 與 HZZa 的動態因子模型估計組合預期報酬，並未提及要素組成的方式，Fama and French (2015) 針對 *SMB*, *HML* 的組成則有明確地說明，同時也說明了 FF5 因子結構下 *RMW* 及 *CMA* 的分類方法。<sup>4</sup> 本文依據 Fama and French (2015) 的分類精神找出  $2 \times 2$ 、 $2 \times 3$  與  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  的排列，此一方式與 HHL 的做法完全不同，因此本文並非依循 HHL 的動態因子模型估算動態組合的超常報酬，而是有所創新了。 $2 \times 3$  的分類法是指將公司規模分成兩群，而 *BTM* 分成三群，公司規模的分類方式是根據 NYSE 市值中位數做為分界點，而 *BTM* 則是依 NYSE 的第 30 分位與第 70 分位做為區別，交乘的結果會出現六個價值加權的投資組合，其中規模因素  $SMB_{BM}$  是指小規模股票組合報酬減去大規模股票組合報酬，而價值因素部分則是兩個高 *BTM* 組合報酬的平均數減去兩個低 *BTM* 組合報酬的平均數。這與表 1 的結構並不相同，因為不管是價值因素或規模因素，所產生的平均超常報酬都是單一超常報酬並沒有加權計算。

當運用 FF5 時，因為導入 *RMW* 與 *CMA*，如此規模因子就會變成  $SMB_{BM}$ 、 $SMB_{OR}$  與  $SMB_{INV}$  為主要分類約 9 個小型股組合與 9 個大型股組合， $2 \times 3$  的意思就是這兩個組合相減，關於詳細公式說明表達於表 2 的備註欄中。 $2 \times 2$  的分類法則是以 *SIZE*、*BM*、*DP* 與 *INV* 在 NYSE 上所處的中位數做為區分點，此時形成 *SH*、*SL*、*SK*、*SW*、*SL*、*SA*、*BH*、*BL*、*BR*、*BW*、*BC* 與 *BA* 等 12 個組合。至於  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  則是形成 *SHRC*、*SHRA*、*SHWC*、*SHRC*、*SLRA*、*SLWC* 與 *SLWA* 等 8 種組合。

表 2 分表 A 做為動態因子報酬的描述性統計，形成公式，詳細列示於表 2 之說明。*SBM* 每月平均報酬分別是 0.123, 0.094 與 0.830，標準差分別為 2.313, 2.204 與 2.242，平均數與標準差幾乎是相同的，乃是因為公司規模的分界點常是以 NYSE 市場籌碼中位數做為分

<sup>4</sup> *RMW* 是以營業利益為主區分成穩健 (robust)、中庸 (neutral) 與脆弱 (weak) 3 種，是穩健減脆弱的部分。*CMA* 是指投資活動中保守 (conservation)、中庸 (neutral) 與進取 (aggressive) 3 種，由保守減去進取。

表 2 動態因子模型的參數估計

A. 動態因子模型的參數估計與標準差										
2×3 因子			2×2×2×2 因子							
<i>MKT</i>	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>MKT</i>	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>MKT</i>	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>RMW</i>	<i>CMA</i>
0.192	0.123	0.062	0.524	0.094	0.657	0.845	0.830	0.745	0.770	0.787
1.914	2.313	2.114	0.138	1.204	1.189	0.03	0.042	0.068	0.043	0.040
27.88	26.25	13.41	28.60	24.55	13.78	27.72	19.68	11.00	18.07	19.54

B. 運用無跡卡爾曼濾波法決定預期誤差項												
	$\gamma_{i,t-1}$	$\gamma_{i,t-2}$	$\gamma_{i,t-3}$	$\gamma_{i,t-4}$	$\gamma_{i,t-5}$	$\gamma_{i,t-6}$	$\theta_{i,t-1}$	$\theta_{i,t-2}$	$\theta_{i,t-3}$	$\theta_{i,t-4}$	$\theta_{i,t-5}$	$\theta_{i,t-6}$
$e_{SL,t}$	0.41	-0.06	0.35	-0.13	-0.94	0.02	-0.88	-0.88	-0.47	0.47	0.83	-0.95
$e_{SM,t}$	1.24	-0.31	0.51	0.65	-0.36	0.003	-0.71	-0.82	-0.05	1.02	-0.43	0.48
$e_{SH,t}$	-0.18	-0.92	-0.33	-0.02	0.83	0.44	-0.06	-0.57	-0.25	-0.90	0.31	0.49
$e_{BL,t}$	-0.25	-0.56	-0.01	0.21	-0.16	0.57	0.40	0.59	0.12	-0.23	0.16	-0.56
$e_{BM,t}$	0.41	0.49	0.37	-0.48	-0.26	0.05	-0.38	-0.37	0.37	0.35	0.09	-0.48
$e_{BH,t}$	0.50	-0.19	1.14	-0.43	-0.87	0.13	-0.72	-1.40	1.41	0.59	-0.88	1.22

C. 運用 GARCH(1,1)決定預期誤差項												
	$\gamma_{i,t-1}$	$\gamma_{i,t-2}$	$\gamma_{i,t-3}$	$\gamma_{i,t-4}$	$\gamma_{i,t-5}$	$\gamma_{i,t-6}$	$\theta_{i,t-1}$	$\theta_{i,t-2}$	$\theta_{i,t-3}$	$\theta_{i,t-4}$	$\theta_{i,t-5}$	$\theta_{i,t-6}$
$e_{SL,t}$	1.13	0.13	0.05	-0.01	-0.05	-0.06	0.35	0.13	0.85	0.10	0.07	0.03
$e_{SM,t}$	0.97	0.02	-0.03	0.02	-0.03	-0.07	0.10	0.06	-0.01	0.01	0.03	0.01

表 2 動態因子模型的參數估計 (續前頁)

C. 運用 GARCH(1,1)決定預期誤差項

	$\gamma_{i,t-1}$	$\gamma_{i,t-2}$	$\gamma_{i,t-3}$	$\gamma_{i,t-4}$	$\gamma_{i,t-5}$	$\gamma_{i,t-6}$	$\theta_{i,t-1}$	$\theta_{i,t-2}$	$\theta_{i,t-3}$	$\theta_{i,t-4}$	$\theta_{i,t-5}$	$\theta_{i,t-6}$
$e_{SH,t}$	0.94	0.03	-0.02	0.01	-0.06	-0.05	0.13	0.06	0.02	0.03	0.01	0.37
$e_{BL,t}$	0.66	-0.08	-0.03	-0.01	-0.01	-0.03	-0.01	0.03	0.004	0.02	0.03	0.08
$e_{BM,t}$	0.34	0.47	0.32	0.14	0.69	0.34	0.06	0.65	0.76	0.62	0.97	0.61
$e_{BH,t}$	0.24	0.24	0.68	0.64	0.17	0.40	0.07	0.29	0.47	0.26	0.26	0.58

資料來源：K. R. French 網站，該資料由 CRSP 資料庫中取得，自 1963 年 7 月至 2015 年 8 月，合計 626 個月。

說明：本表說明動態因子的參數估計結果，分表 A 為運用  $2 \times 2 \times 2$  因子與  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  因子所估計出的 MKT、SMB 與 HML，由於新增動態 FF5 因子，因此也在  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  因子中增加列示 RMW 及 CMA 的參數估計。各欄第一列為月平均報酬率，第二列為標準差、第三列為  $t$  值。在  $2 \times 3$  因子方面，HML 的計算為  $(SH + SN + SL)/3 - (BH + BN + BL)/3$ ，SMB 的計算為依 NYSE 市場籌碼中位數作為臨界點，藉以區分出大公司規模與小公司規模兩群後相減。而 HML 分為高中低三群。在  $2 \times 2$  因子方面，HML 的計算為  $(SH + BH)/2 - (SL + BL)/2$ ，SMB 的計算為  $(SH + SL)/2 - (BH + BL)/2$ 。在  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  因子方面是以 SBM，HML，RMW 與 CMA 的 NYSE 市場籌碼中位數作為臨界點，HML、SMB、RMW、CMA 的公式分別為：

$$[(SHRC + SHRA + SHWC + SHWA + BHRC + BHRA + BHWA + BLWC + BLWA)8 - (SLRC + SLRA + SLWC + SLWA + BLRC + BLRA + BLWC + BLWA)8],$$

$$[(SHRC + SHRA + SHWC + SHWA + BLRC + BLRA + BLWA)8 - (BHRC + BHRA + BHWA + BLRC + BLRA + BLWC + BLWA)8],$$

$$[(SHRC + SHRA + SLRC + SLRA + BHRC + BHRA + BLRC + BLWA + BHWA + BLWA)8 - (SHWC + SHWA + SLWA + BLWC + BLWA)8],$$

$$[(SHRC + SHWC + SLRC + SLWC + BHRC + BHWA + BLRC + BLWA)8 - (SHRA + SHWA + SLWA + BHWA + BLWA + BLWA)8].$$

本文以 FF3 因子為主構建動態模型 (參考 HHL 與 HZZ)，FF5 因子動態模型僅做為穩健性測試並深入討論。分表 B 運用無跡卡爾曼濾波法決定預期誤差項，以落後期六期報酬率所建立的組合報酬率，依據以下公式求取向前一期預期誤差的預期值  $e_{i,t} = c_0 + \sum_{s=1}^6 \gamma_{i,t-s} R_{i,t-s} + \sum_{s=1}^6 \theta_{i,t-s} e_{i,t-s} + \zeta_{i,t}$ 。分表 C 則是運用 GARCH(1,1) 估計六期落後期預期誤差項。

類，而 *SMB* 平均報酬的顯著性，T 值是大於 2.3 異於零的。*HML* 的平均月報酬在 2×3 因子較低，但標準差在 2×2×2×2 因子是最小 (0.068)，2×3 因子顯示分成三個區塊，因此出現高報酬低標準差或低報酬高標準差的現象，情況與 Fama and French (2015) 相同。在 2×2×2×2 因子，*HML*、*RMW* 與 *CMA* 的平均報酬率是相當的，雖然標準差都很小，但 T 值是極顯著的。由於本文要探討動態因子的穩健性會建構以 Fama and French (2015) 為主的五因子模型（增加 *RMW* 與 *CMA*），相較 Fama and French (2015) 的記載，平均數較高、標準差較低，本文所紀錄的平均數是 0.77 (FF5 是 0.25) 與 0.78 (FF5 是 0.14)，標準差則為 0.043 (1.49) 與 0.04 (1.29)，顯示公司規模分成大與小兩塊下，會有投資溢價與營運利益議價的現象產生，此點與 FF5 因子資產評價模型是相同的。

由於 FF 多因子模型利用 2×2、2×3 與 2×2×2×2 模式求出各個因子都具有高度相關性 (Fama and French, 2015)，因此為節省篇幅，本文僅表示 2×3 因子模型的動態因子經由 UKF 與 GARCH 所求得的預期誤差。分表 B 運用 UKF 檢定動態因子為不偏估計值，在取得參數點估計值為不偏估計值後，本文始繼續討論  $D_{it-1}$  代表事前預測值與  $D_{it}$  的事後調整值。HHL 提出動態因子模型分別進行橫斷面與時間序列分析，將歷史資料經由卡爾曼濾波分解出動態因子之後，轉換出事後因子。本文改用 UKF 進行轉換，所得到 (4) 式落後六期的  $\gamma$  值與  $\theta$  值。再運用這些數值代入 (4) 式求得各期的預測誤差項。如此就能從  $D_{it}$  推估  $D_{it-1}$ 。

表 2 分表 B 說明預測誤差決定因子  $\gamma$  與  $\theta$  落後六期的分布， $e_{BL}$  範圍在  $\pm 0.57$ 、 $e_{BM}$  範圍在  $\pm 0.48$ 、 $e_{BH}$  範圍在  $\pm 1.41$ 、 $e_{SM}$  範圍在  $\pm 1.41$ 、 $e_{SL}$  範圍在  $\pm 0.83$ 、 $e_{SH}$  範圍在  $\pm 0.90$ 。而利用 GARCH 進行推估可求得  $e_{BL}$  範圍在  $-0.03 \sim 0.66$ 、 $e_{BM}$  範圍在  $0.14 \sim 0.97$ 、 $e_{BH}$  範圍在  $0.17 \sim 0.68$ 、 $e_{SM}$  範圍在  $-0.07 \sim 0.97$ 、 $e_{SL}$  範圍在  $-0.05 \sim 1.13$ 、 $e_{SH}$  範圍在  $-0.06 \sim 0.94$ 。在 2×3 模型下， $D_{it}^{MKT}$  與  $D_{it-1}^{MKT}$  具有負相關但  $D_{it-1}^{SIZE}$  與  $D_{it-1}^{BTM}$  則與其前期因子具有正的相關性，顯見動態因子模型中的主

要兩個因子的自我相關方向並不完全一致。

$2 \times 2 \times 2 \times 2$  因子所計算出來的五個因子標準差都偏低（0.03 到 0.06），此處記錄 *MKT* 的變異數之平均數為 1.968 與  $\sigma_{BTM}^2$  為 1.157，顯然受到  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  因子的影響，根據 Fama and French (2015) 的記載，投資溢酬與營運利潤溢酬造成了公司規模溢酬與成長機會溢酬的減少，本文的  $2 \times 2$  因子與  $2 \times 3$  因子並未納入 FF5 因子，於是造成  $2 \times 2$  因子與  $2 \times 3$  因子所算出的平均數要高於  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  因子，且整理後 *MKT*、*SIZE* 與 *BTM* 的變異數要較  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  因子為高。表 3 分表 A 為運用 UKF 所計算出來的事後因子，大多數動態因子之間的相關係數都很低，只有公司規模的動態因子的相關係數為 20%，與營運利潤落後一期的相關係數為 49%，且營運利潤與市場組合的相關係數亦為 49%，可見得公司規模與營運利潤之間息息相關。營運利潤波動度則與許多動態因子具有負相關性，顯示動態條件與波動度之間關係為相反方向運動，投資類型的動態因子與本身波動度之間為高度相關，運用 GARCH 計算出的波動度平均數與標準差都明顯高於運用 UKF 所計算求得的平均數與標準差，這也是 Fu (2009) 改用 EGARCH 的原因，運用 EGARCH 可以使波動度較平滑些，但在動態實證上，GARCH 求出的波動度變異範圍較大，因此用在討論  $10 \times 10$  組合報酬所產生的影響上較具個別組合的顯著性。

我們發現動態因子的條件變異數中，與動態五因子之間的關聯性都很弱，係數值介於絕對值 12% 到 0.05% 之間，絕大多數都低於 10%，但是 *SIZE* 與事後調整的因子  $D_{t-1}^{SIZE}$ 、有相對較高的相關係數，這說明了動態因子經由 UKF 法計算後，有一些額外訊息會被動態因子所掌握，因此我們會後續進行資產訂價上的樣本外的預測。FF3 因子彼此之間相關係數較其他因子為高， $D_{it}$  與  $D_{it-1}$  之間的相關係數很差，以上說明  $D_{it}$  是獨自載入報酬變異而 FF5 因子架構卻是一起解釋報酬變異，或集中在某幾個因子來影響報酬。

表 3 動態因子的相關係數

State Variables	$D_t^{MKT}$	$D_{t-1}^{MKT}$	$D_t^{SIZE}$	$D_{t-1}^{SIZE}$	$D_t^{BTM}$	$D_{t-1}^{BTM}$	$D_t^{OP}$	$D_{t-1}^{OP}$	$D_t^{INV}$	$D_{t-1}^{INV}$	$\sigma_{MKT}^2$	$\sigma_{SIZE}^2$	$\sigma_{INML}^2$	$\sigma_{OP}^2$														
$D_t^{MKT}$	1.95	4.97	1.00																									
$D_{t-1}^{MKT}$		2.19	2.34	0.002	1.00																							
$D_t^{SIZE}$			0.03	0.23	0.04	0.11	1.00																					
$D_{t-1}^{SIZE}$				0.11	0.38	0.07	0.05	0.21	1.00																			
$D_t^{BTM}$					0.23	2.18	0.02	0.11	0.18	0.01	1.00																	
$D_{t-1}^{BTM}$						0.11	0.43	0.05	-0.04	0.08	0.07	0.02	1.00															
$D_t^{OP}$							0.65	10.50	0.002	-0.10	0.05	-0.01	0.03	-0.05	1.00													
$D_{t-1}^{OP}$								0.24	12.40	0.02	0.49	-0.08	0.12	-0.00	0.490	1.00												
$D_t^{INV}$									0.23	0.73	0.06	-0.10	0.05	-0.01	0.20	-0.01	0.20	0.09	0.12	-0.01	0.03	0.06	0.03	1.00				
$D_{t-1}^{INV}$										0.29	0.58	0.02	-0.07	0.06	0.003	0.06	0.03	0.06	0.12	0.09	0.12	-0.15	0.117	-0.26	0.015	1.00		
$\sigma_{MKT}^2$											1.97	1.43	-0.08	-0.10	0.10	0.20	0.09	0.09	0.04	-0.00	0.05	0.05	0.09	0.63	1.00			
$\sigma_{SIZE}^2$												1.25	0.67	0.05	0.49	0.28	0.18	0.09	0.04	-0.00	0.05	0.05	0.09	0.63	1.00			
$\sigma_{BTM}^2$													1.16	0.85	0.06	-0.01	0.20	-0.12	0.14	0.19	0.03	0.05	-0.04	0.15	0.69	0.53	1.00	
$\sigma_{Op}^2$														3.30	1.01	0.03	0.01	0.04	-0.01	-0.04	-0.24	-0.12	-0.01	-0.12	-0.07	-0.03	-0.12	1.00
$\sigma_{INV}^2$															2.67	0.79	0.02	0.003	-0.01	0.06	0.03	-0.26	-0.16	0.83	0.64	-0.09	-0.04	0.90

A：運用 UKF 計算出來的事後因子





### 3.2 UKF 衡量橫斷面的公司特有風險波動度對預期報酬之影響

Brennan et al. (2004) (BWX) 提出簡單跨期限限制的資產評價模型 (model of intertemporal capital asset pricing, ICAPM)，納入與時俱變的真實利率和資本市場線的斜率，並依據公司規模、價值效果 (BTM) 及產業效果分成  $5 \times 5$  投資組合來估計對組合報酬的影響。此外 Lo and MacKinlay (1990) 指出資料窺探偏誤，因此本文也列出十個動能因子與十個長期反轉因子 (Huang et al., 2010) 計 120 個投資組合，以求減少潛在問題，在探討橫斷面的報酬變異時，100 組合與 120 組合都分別運用在探討  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  的分類投資組合中，但  $2 \times 2$  與  $2 \times 3$  組合分類僅使用 100 組合。此外，為說明本文在實證上的有效性，也就是回應 LNS 他們所認為的定價偏誤的問題，本文也進行 LNS 所強調的  $R_{GLS}^2$  檢定，以穩固本文的實證結果。

本文參考 BWX 兩步驟迴歸進行實證研究，第一步是建立  $10 \times 10$  的  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  的組合，探討 1970 年 7 月到 2015 年 6 月這段期間的橫斷面超常報酬，第二步則是將模型上的風險因子以橫斷面迴歸探討對月資料為主的平均超常報酬。根據 (13) 式本文發展估計方程式如 (15) 式：

$$E(R_t) = \sum_{j=1}^5 \eta_j^{t-1} \hat{D}_{j,i}^{t-1} + \sum_{j=1}^5 \eta_j^t \hat{D}_{j,i}^* + \sum_{j=1}^5 \eta_j^H \hat{D}_{j,i}^H + e_{i,t}, \quad (15)$$

100 個投資組合的平均超常報酬， $\hat{D}_{j,i}^{t-1}$  為風險溢酬的事前因子五個維度的矩陣，則  $\eta^{t-1} = [\eta_{MKT}^a, \eta_{SIZE}^a, \eta_{BTM}^a, \eta_{OP}^a, \eta_{INV}^a]$ ， $a$  代表 ex ante 係指事前。如此  $\eta^t$  為風險溢酬的事後因子， $\eta^t = [\eta_{MKT}^p, \eta_{SIZE}^p, \eta_{BTM}^p, \eta_{OP}^p, \eta_{INV}^p]$ ，也是五個維度的矩陣。 $\eta^H = [\eta_{MKT}^H, \eta_{SIZE}^H, \eta_{BTM}^H, \eta_{OP}^H, \eta_{INV}^H]$  就是五個維度的風險溢酬變異係數的矩陣。 $\hat{D}_i^* = D_i^{t-1} - D_i^t$  代表可捕捉到  $D_i^{t-1}$  的資訊但不被  $D_i^t$  解釋的部分，因此  $D_i^*$  被認為是剩餘的因素負荷量。 $D_i^0 = [D_i^{MKT}, D_i^{SIZE}, D_i^{BTM}, D_i^{OP}, D_i^{INV}]$ ，而  $D_i^H$  則為  $\sigma_i^{MKT}, \sigma_i^{SIZE}, \sigma_i^{BTM}$ ，

$\sigma_i^{OP}, \sigma_i^{INV}$  條件變異數。 $E(R_i)$  是預期報酬  $R_i$  的非條件平均數， $e_i$  則是整個  $i$  投資組合所形成的動態因子波動度模型的價格偏誤之殘差項。表 4 顯示從橫斷面探討動態因子波動度對超常報酬的影響，其中  $MKT$  在  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  分組與  $2 \times 3$  分組中，當期個別報酬矩陣對預期報酬具有顯著正面效果，在  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  的分組中對預期報酬的影響為 114.2% 與 9.3%，在  $2 \times 3$  分組中為 36.2%，顯示對預期報酬的影響相對很高，但  $MKT$  前期對預期報酬的影響為顯著地負向效果。Ang et al. (2006) 指出前期波動度對後期預期報酬的影響為顯著地負向效果，此處  $MKT$  也展現出前期波動度對後期預期報酬的影響。當期公司規模對預期報酬率的影響大多為負向效果，只有在  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  的分組中雖為負向效果但並不顯著。相較 HZZa 的實證結果，他們得到的係數在 -0.122 到 -0.093 之間，且數個國家的係數並不顯著，因此本文在公司規模對預期報酬率影響的發現與 HZZa 一致。至於價值效果，四個模型（三個分組）的當期  $BTM$  都對預期報酬為正面效果，但係數值很低，與 HHL 的發現也是一樣的。可是前期  $BTM$  在三個分組中的  $10 \times 10$  個組合報酬中為負向效果，只有在 120 個組合為正向效果。由於  $BTM$  代表價值效果， $BTM$  越低成長機會越大，因此對預期報酬的影響應為負向效果，與 HHL 的研究結果相較，他們所得到的結果是  $BTM$  越低與越高時，係數顯著為負，只有趨近中位數，係數才是顯著為正，與本文的發現稍有不同。在公司特有風險波動度對預期報酬的影響方面， $MKT$  對預期報酬的影響顯著為負向效果， $SIZE$  與  $BTM$  的影響出現在三個分組中都為正向效果。相較 HZZ 的發現， $MKT$ 、 $SIZE$  與  $BTM$  都是正向效果，但  $MKT$  的影響並不顯著，且係數值在 20% 到 68% 之間，與本文所得係數僅在 10% 以下有顯著不同。但表 4 的  $OP$  與  $INV$  的條件變異數所得係數較高（如  $\eta_{OP}^H$  為 -1.897 到 0.967）且為顯著的負向效果。雖然  $\eta_{INV}^H$  的三個分組並不都是顯著正向效果，但係數也是 100% 以上，可見  $OP$  與  $INV$  的條件變異數對預期報酬的影響對  $MKT$ 、 $BTM$  與  $SIZE$  有吸納的作用。

表 4 橫斷面變異與平均超常報酬

Multi-factors	2 × 2 × 2 × 2		2 × 2		2 × 3	
	1970年7月-2015年6月 100 組合	1970年7月-2015年6月 120 組合	1970年7月-2015年6月 100 組合	1970年7月-2015年6月 100 組合	1970年7月-2015年6月 100 組合	1970年7月-2015年6月 100 組合
$\eta_{MKT}^t$	1.142 <sup>****</sup> (5.32)	0.093 <sup>****</sup> (2.315)	-0.004 (-0.687)	-0.004 (-0.687)	0.362 <sup>****</sup> (6.552)	0.362 <sup>****</sup> (6.552)
$\eta_{SIZE}^t$	-0.001 <sup>***</sup> (-1.99)	0.759 <sup>****</sup> (4.443)	-0.019 <sup>****</sup> (-4.474)	-0.019 <sup>****</sup> (-4.474)	-0.248 (0.943)	-0.248 (0.943)
$\eta_{BTM}^t$	0.001 <sup>****</sup> (4.179)	0.053 (1.16)	0.009 <sup>****</sup> (3.296)	0.009 <sup>****</sup> (3.296)	0.002 (0.054)	0.002 (0.054)
$\eta_{OP}^t$	0.631 <sup>****</sup> (2.845)	0.556 <sup>****</sup> (2.717)	0.140 <sup>*</sup> (1.849)	0.140 <sup>*</sup> (1.849)	0.648 <sup>****</sup> (3.801)	0.648 <sup>****</sup> (3.801)
$\eta_{INV}^t$	-2.889 <sup>****</sup> (-2.845)	3.152 <sup>****</sup> (3.587)	0.624 <sup>****</sup> (2.310)	0.624 <sup>****</sup> (2.310)	-2.109 <sup>****</sup> (-2.939)	-2.109 <sup>****</sup> (-2.939)
$\eta_{MKT}^{t-1}$	-0.544 <sup>****</sup> (-9.211)	0.014 (0.646)	-0.844 <sup>****</sup> (-2.610)	-0.844 <sup>****</sup> (-2.610)	-0.185 <sup>****</sup> (-3.164)	-0.185 <sup>****</sup> (-3.164)
$\eta_{SIZE}^{t-1}$	-0.020 <sup>****</sup> (-3.059)	0.954 <sup>****</sup> (3.087)	-0.957 <sup>****</sup> (-3.505)	-0.957 <sup>****</sup> (-3.505)	0.034 (0.704)	0.034 (0.704)
$\eta_{BTM}^{t-1}$	-0.001 <sup>****</sup> (-6.402)	0.955 <sup>****</sup> (3.087)	-0.022 (-1.127)	-0.022 (-1.127)	-0.154 <sup>****</sup> (-4.570)	-0.154 <sup>****</sup> (-4.570)
$\eta_{OP}^{t-1}$	0.160 (0.357)	0.089 (0.178)	0.158 (0.70)	0.158 (0.70)	0.151 <sup>****</sup> (3.121)	0.151 <sup>****</sup> (3.121)
$\eta_{INV}^{t-1}$	-0.134 (-1.596)	-0.170 <sup>****</sup> (-2.881)	-0.047 <sup>****</sup> (-2.310)	-0.047 <sup>****</sup> (-2.310)	-0.132 <sup>****</sup> (-2.574)	-0.132 <sup>****</sup> (-2.574)
$\eta_{MKT}^H$	-0.059 <sup>****</sup> (-9.194)	-0.059 <sup>****</sup> (-3.34)	-0.005 <sup>****</sup> (-2.881)	-0.005 <sup>****</sup> (-2.881)	-0.124 <sup>****</sup> (-6.891)	-0.124 <sup>****</sup> (-6.891)

表 4 橫斷面變異與平均超常報酬 (續前頁)

$\eta_{SIZE}^H$	0.086 <sup>***</sup> (2.759)	0.112 (0.384)	0.090 <sup>***</sup> (8.027)	0.021 (1.189)
$\eta_{BTM}^H$	0.009 <sup>***</sup> (2.403)	0.009 (1.159)	0.008 <sup>***</sup> (5.428)	0.051 <sup>***</sup> (6.474)
$\eta_{OP}^H$	-1.182 <sup>***</sup> (-4.629)	-1.897 <sup>*</sup> (-1.685)	0.967 <sup>**</sup> (2.025)	-1.047 <sup>***</sup> (-4.602)
$\eta_{INV}^H$	1.522 <sup>*</sup> (1.715)	1.522 (1.428)	0.047 (1.154)	1.567 <sup>*</sup> (1.651)
SSE	1.08	0.98	2.42	2.30
OLS $R^2$	0.298	0.127	0.272	0.329
Q test		F=4.5 (p 值=0.034)		F=7.72 (p 值=0.006)

資料來源：K. R. French 網站，該資料由 CRSP 資料庫中取得，自 1970 年 7 月至 2015 年 6 月，合計 540 個月。  
 說明：1. 本表記載以 *SIZE* 與 *BTM* 所分成的  $10 \times 10$  組合，為顧及 Lo and MacKinlay (1990) 有關資料窺探偏誤的文獻，額外加進十個動能因子與十個長期反轉因子 (Huang et al., 2010) 計 120 個投資組合，以求減少潛在問題。橫斷面迴歸之公式為：

$$E(R_t) = \sum_{j=1}^5 \eta_j^H \hat{D}_{j,t}^* + \sum_{j=1}^5 \eta_j^{H-1} \hat{D}_{j,t}^* + \sum_{t=1}^5 \eta_j^H \hat{D}_{j,t} + e_{t,t}$$

此處  $E(R_t)$  為 100 個投資組合的平均超常報酬， $\hat{D}_{j,t}$  為  $j$  個事後因子的負荷量，其中  $j = MKT, SIZE, BTM, OP$  與 *INV*，而  $\hat{D}_{j,t}^*$  是  $j$  的事前因子的殘差因子負荷量， $\eta_j^H$  為變異數因子的估計負荷量， $\eta_j^{H-1}$  為風險係數，代表整個風險的價格，第一欄為係數值，第二欄括號內  $t$  值。SSE 為殘差項平方之總和。F 檢定即 Q 檢定之轉換，根據 Petkova (2006) 的文獻，有些學者擔心  $R^2$  可能會產生給予所有資產相同權重，卻實際上權重不一的問題，因此使用 Q 檢定， $Q = T \bar{e}' \Sigma \bar{e}$ ，其中  $\bar{e}$  為時間數列殘差項的共變數矩陣， $\bar{e}$  為橫斷面殘差向量平均數，而 Q 檢定係漸近  $\chi^2$  分配，Shanken (1985) 將之轉換為 F 分配。不載入表 4 的紀錄有計算 Lewellen et al. (2010) 所要求的  $R_{GLS}^2$  係數。

2. \*, \*\*, \*\*\* 分別表示 10%、5% 與 1% 顯著水準。

本文參考 LNS 的作法，加入變異數方程式組合後，發現採用  $10 \times 10$  的組合較相對穩健，可以減輕潛在的模型設定錯誤的問題，這樣公司規模與成長機會的條件變異數可以與風險溢酬有顯著的正向效果，而且此績效較 FF3 的傳統作法為佳，像是調整後相關係數顯著較高，標準誤也較小且對預期報酬的效果為正面。Jagannathan and Wang (1996)、Lettau and Ludvigson (2001) 與 Petkova (2006) 都主張橫斷面相關係數越高，則定價偏誤的情況越低，固然 FF3 可以解釋組合報酬的時間變異超過 90% 及平均超常報酬的橫斷面變異超過 75%，LNS 則認為  $R_{GLS}^2$  相關係數相較  $R_{OLS}^2$  係數更具穩健性。 $R_{GLS}^2$  的公式為： $R^2 = [\sigma_c^2(\bar{R}) - \sigma_c^2(\bar{e})] / \sigma_c^2(\bar{R})$ ， $\sigma_c^2$  代表樣本內橫斷面的變異數， $\bar{R}$  為平均超常報酬的向量， $\bar{e}$  為平均殘差項之向量。因此  $R^2$  顯示橫斷面變異對平均報酬可被模型解釋多少部分。基於篇幅，本文不再說明 GLS 公式，本文同步計算  $R_{GLS}^2$  但並不表列，分別得到 12%、16.87%、12.4% 與 13.9%，都較表 4  $R_{OLS}^2$  的 29.8%、27.2% 與 32.9% 為低（除了 120 個組合的係數為 12.7%）。

### 3.3 時間數列迴歸的實證結果

本文利用 GARCH (1,1) 建立變異數方程式，進而討論多因子波動度對預期報酬之間的關聯性，(16) 式表達如下：

$$E(R_i) = \alpha_i + \sum_{t=1}^5 \theta'_{i,j} D_{i,j|t} + \sum_{t=1}^5 \theta^*_{i,j} D_{i,j|t-1} + \sum_{t=1}^5 \theta^H_{i,j} H_{i,j|t-1} + e_i, \quad (16)$$

(16) 式的變數與 (15) 式是一樣的， $\theta_{i,j}$  代表時間數列因子係數， $j = MKT, SIZE, BTM, OP$  與  $INV$ 。

過去從時間序列角度討論公司特有風險波動度與股價報酬的關聯性，如 Ghysels et al. (2005)、Guo and Whitelaw (2006)、Ludvigson and Ng (2007)、Fu (2009) 發現為顯著地正面效果；Glosten et al. (1993)、Brandt and Kang (2004)、Guo et al. (2014) 則測驗出顯著地

負面效果。上述對公司特有風險的估計都是運用市場模式，平均加權或價值加權，也有可能產生模型設定錯誤的效果。Hammoudeh et al. (2009) 認為公司特有風險波動是來自於產業間的資訊外溢效果，因此 LNS 運用 FF 三因子或四因子模型建立五乘五加產業的投資組合來討論特有風險波動度與股價報酬之間的關係，Fu (2009) 僅將高特有風險波動度的股票分成五群，探討波動度對落後一期報酬率之間的關係，其效果也是有負有正，且所分類組合中，最低組合與最高組合的影響係數較高，中間群組最低，因此他認為若過去有高報酬率的公司將來會有高的風險波動度。表 5 僅列示條件變異數  $H_{j,t|t-1}$  的時間數列係數  $\theta_{i,j}^H$  的值，分表 A 記錄依營運利潤強弱分成五群再乘以公司規模五群的係數值在 100 個組合中有 98 個組合為顯著正面效果，係數值在 54.1% 到 24.6%。分表 B 記錄依投資類型的穩當與否分成五群，記有 96 個組合為顯著正面效果。由表 5 兩個分表可以得到結論，運用 GARCH 計算出的波動度，在分成三個波動度矩陣之下，營運利潤與投資類型分組所找到的公司特有風險波動度在不同的組群中對預期報酬的影響為正向效果。時間數列與橫斷面迴歸兩種測驗方式的結果不同，主要原因是橫斷面經過 UKF 分析後得到事後因子，且同時列入前後期動態性做為決定變數與公司特有風險波動度一起探討對預期報酬的影響，而 GARCH 是已估算出其落後期間並由此計算出落後期的條件變異數做為波動度，因此公司特有風險波動度對預期報酬之間的影響，在波動度本身已經包含了落後多期的波動效果，並非後設的或透過五因子變數所建立的向量來推估出其波動度，所以表 4 的結果會產生在不同期間對預期報酬的影響不同，而透過時間數列所估計出的波動度對股價影響為正向效果，此處支持 Bali et al. (2005)、Bali and Cakici (2008) 的論點，相較 HZZb 的 100 組合中有較高的顯著水準，由於 Ang et al. (2006, 2009) 認為前期波動度對後期報酬率為負向效果，本文所討論的為同期，故無法比較結論異同。

表 5 時間數列迴歸與組合超常報酬

A. <i>RMW</i> 動態波動度對組合超常報酬										
組合	1(低)	2	3	4	5	6	7	8	9	10(高)
1(小)	0.048 (0.509)	0.286 (3.299)	0.246 (2.711)	0.388 (4.908)	0.339 (4.973)	0.380 (5.212)	0.294 (3.736)	0.358 (4.191)	0.348 (4.546)	0.318 (3.720)
2	0.257 (2.574)	0.389 (4.397)	0.317 (3.459)	0.402 (4.471)	0.442 (4.471)	0.431 (5.190)	0.401 (4.686)	0.422 (4.483)	0.376 (4.343)	0.471 (7.057)
3	0.283 (2.947)	0.286 (3.299)	0.409 (5.164)	0.411 (5.327)	0.470 (5.335)	0.349 (3.558)	0.481 (5.684)	0.443 (4.924)	0.541 (6.525)	0.425 (4.994)
4	0.433 (4.195)	0.386 (4.321)	0.517 (6.331)	0.449 (5.453)	0.455 (5.023)	0.445 (4.987)	0.453 (4.902)	0.460 (4.151)	0.362 (4.610)	0.434 (5.130)
5	0.259 (2.468)	0.460 (5.325)	0.467 (5.561)	0.514 (6.245)	0.460 (5.022)	0.475 (5.208)	0.479 (5.385)	0.494 (6.524)	0.446 (4.966)	0.461 (5.123)
6	0.154 (1.579)	0.532 (6.043)	0.458 (5.016)	0.436 (4.644)	0.466 (4.953)	0.400 (4.277)	0.466 (4.107)	0.440 (5.165)	0.535 (6.614)	0.488 (5.614)
7	0.465 (6.532)	0.332 (4.236)	0.483 (7.158)	0.436 (4.644)	0.466 (4.953)	0.400 (4.277)	0.406 (4.107)	0.440 (5.659)	0.383 (4.873)	0.407 (4.224)
8	0.443 (4.525)	0.347 (3.646)	0.376 (4.652)	0.502 (5.195)	0.416 (5.093)	0.572 (6.449)	0.286 (3.854)	0.377 (4.649)	0.456 (5.345)	0.379 (4.330)
9	0.490 (3.547)	0.305 (3.200)	0.299 (3.269)	0.465 (5.369)	0.452 (5.026)	0.374 (4.238)	0.286 (3.854)	0.418 (4.877)	0.495 (6.171)	0.422 (5.208)
10(大)	0.490 (9.547)	0.395 (5.059)	0.380 (3.994)	0.273 (3.403)	0.197 (2.307)	0.231 (3.175)	0.332 (4.370)	0.312 (4.396)	0.342 (4.017)	0.310 (3.366)
B. <i>CM4</i> 動態波動度對組合超常報酬										
組合	1(低)	2	3	4	5	6	7	8	9	10(高)
1(小)	0.371 (3.368)	0.456 (5.257)	0.489 (5.595)	0.469 (5.394)	0.480 (5.410)	0.414 (4.952)	0.438 (4.958)	0.379 (4.287)	0.305 (3.359)	0.134 (1.485)
2	0.308 (3.285)	0.393 (4.565)	0.385 (4.451)	0.334 (4.042)	0.459 (5.508)	0.434 (5.012)	0.363 (4.361)	0.344 (4.027)	0.256 (2.938)	0.146 (0.091)

表 5 時間數列迴歸與組合超常報酬 (續前頁)

組合	B. CMA 動態波動度對組合超常報酬									
	1(低)	2	3	4	5	6	7	8	9	10(高)
3	0.298 (3.290)	0.371 (4.403)	0.431 (5.334)	0.366 (4.696)	0.419 (4.943)	0.488 (6.001)	0.434 (5.224)	0.411 (4.918)	0.345 (3.738)	0.161 (1.781)
4	0.407 (4.706)	0.339 (4.112)	0.376 (4.541)	0.397 (4.815)	0.442 (5.512)	0.464 (5.712)	0.379 (4.603)	0.336 (4.013)	0.250 (2.883)	0.152 (1.720)
5	0.437 (4.931)	0.479 (5.202)	0.402 (4.946)	0.426 (5.275)	0.490 (6.452)	0.373 (4.746)	0.436 (5.225)	0.445 (5.306)	0.324 (3.870)	0.206 (2.242)
6	0.324 (4.182)	0.488 (5.526)	0.398 (5.206)	0.454 (5.711)	0.415 (4.926)	0.400 (5.186)	0.369 (4.617)	0.416 (5.180)	0.378 (4.328)	0.243 (2.684)
7	0.240 (2.823)	0.350 (4.480)	0.407 (5.147)	0.417 (5.489)	0.478 (5.897)	0.392 (5.037)	0.460 (5.440)	0.375 (4.489)	0.331 (3.942)	0.307 (3.443)
8	0.427 (5.248)	0.348 (4.438)	0.348 (4.524)	0.467 (6.301)	0.385 (5.145)	0.422 (5.525)	0.410 (5.297)	0.345 (4.514)	0.442 (5.017)	0.253 (2.774)
9	0.562 (6.529)	0.417 (5.856)	0.372 (5.045)	0.370 (5.136)	0.397 (5.690)	0.513 (6.374)	0.342 (4.607)	0.308 (4.130)	0.324 (4.134)	0.343 (3.870)
10(大)	-0.837 (-13.640)	0.404 (5.274)	0.377 (5.793)	0.358 (5.258)	0.318 (4.588)	0.320 (4.544)	0.393 (5.395)	0.280 (3.754)	0.349 (4.490)	0.281 (3.474)

資料來源：K. R. French 網站，該資料由 CRSP 資料庫取得，自 1970 年 7 月至 2015 年 6 月，合計 540 個月。

說明：1. 本表記載動態因子的變異數之估計負荷量 ( $h_{j,t-1}$ )，總和計算 100 個投資組合，分表 A 為市場因子，分表 B 為公司大小，分表

C 為帳面價值對市值比，進行時間數列的迴歸分析。公式如下： $E(R_t) = \alpha_i + \sum_{j=1}^5 \theta_{i,j} D_{j,t} + \sum_{j=1}^5 \theta_{i,j}^* D_{j,t-1} + \sum_{j=1}^5 \theta_{i,j}^{**} H_{i,j,t-1} + e_t$ ，其中  $E(R_t)$  指 100 個組合中第  $i$  個組合的平均超常報酬。而  $D_{j,t}$  為事後因子， $D_{j,t-1}$  為事前因子， $j = MKT, SIZE, BTM, OP$  與  $INV$ 。

2. \*、\*\*與\*\*\*分別表示 10%、5% 與 1% 顯著水準。

3. 營運利潤 (OP) 係收入減營業成本，營業費用與利息費用後所得餘額除以帳面價值。投資類型的衡量是前兩年總資產減去前一年總資產後除以前兩年的總資產。



當然 LNS 提到運用一般最小平方法 (generalized least squares, GLS) 相關係數檢定結果穩固性的觀點，表 5 參考 Petkova (2006) 的建議，運用蒙地卡羅模擬 (Monte Carlo simulation) 實驗以確認其穩固性。<sup>5</sup>

### 3.4 FF3、HHL 模型、Petkova 模型與 KKLM 模型與動態因子波動度模型之比較

HHL 選擇 1955 年 1 月到 2004 年 12 月獲得橫斷面 *MKT*、*SIZE*、*BTM* 的  $\eta$  係數值個別為 0.12%，0.09%，0.23% ( $t-1$  期) 與 -0.01%，0.16%，0.21% ( $t$  期)。本文納入多因子波動度後，*MKT*、*SIZE*、*BTM* 的  $\eta$  係數值以 120 組所求得的  $\eta$  係數值更為顯著。但本文的時間長度為 1970 年 7 月到 2015 年 6 月，可運用 HHL 模型再做一次以觀察  $\eta$  係數與  $R^2$  是否較之進步。本文得到的結果如表 6，HHL 模型的相關係數  $R_{OLS}^2$  僅 15.8%，都較表 4 的  $R_{OLS}^2$  為低，可是運用  $R_{GLS}^2$  所得係數值為 59.5%，較表 4 的結果高，從 LNS 的論點來看，HHL 較不精緻，FF3 的  $R_{OLS}^2$  為 73.33%，與 Petkova (2006) 的 77.26% 接近， $R_{GLS}^2$  為 59.11% 高於 LNS 實證結果的 6%~19% 之間，Petkova (2006) 與 Vassalou (2003) 指出，只要不是用在資產定價而是進行風險性資產價格的研究，相關係數較低應無損於研究價值。<sup>6</sup>

<sup>5</sup> 蒙地卡羅模擬實驗分成幾個程序，第一步是先估計  $10 \times 10$  的 *SIZE* 與 *BTM* 組合的時間數列迴歸，其次是再跑一次橫斷面迴歸以決定風險溢酬，將時間數列迴歸所求得之  $\beta(\eta)$  值與風險溢酬進行一萬次的拔靴法以求得估計量，再以 OLS 所得之殘差項及調整後的  $R^2$  值，詳細步驟請參考 Petkova (2006)。

<sup>6</sup> Petkova (2006) 認為 FF3 高度解釋超常報酬是因為建立在時間數列上的投資機會集合，他在 FF3 之後又加了幾個創新變數如股利支付率、期間價差、違約價差與總合股利支付率來討論對超常報酬的影響。蒙地卡羅模擬可用來處理只有小抽樣分配時因子負荷量偏差所產生不精確的狀況，產生小抽樣分配後進行一萬次模擬產生因子負荷量，若沒有偏誤就可證明大樣本雖然有較大的標準差，但仍稱得上實證結果的穩健性。

表 6 運用 HHL 模型與 FF3 之實證結果

State	$\eta_{t-1}^{MKT}$	$\eta_{t-1}^{SIZE}$	$\eta_{t-1}^{BTM}$	$\eta_t^{MKT}$	$\eta_t^{SIZE}$	$\eta_t^{BTM}$	$R_{OLS}^2$	$R_{GLS}^2$
HHL	0.110***	0.265	-0.025	0.037**	1.337***	0.151***	15.80%	59.50%
FF3	0.232***	0.018**	-0.038***	-	--	--	73.33%	59.11%

資料來源：K. R. French 網站，該資料由 CRSP 資料庫取得，自 1955 年 1 月至 2004 年 12 月。

說明：HHL 模型是由  $R_{i,t} = E(R_i) + A_i^* K_{i,t-1} + A_i' K_{i,t} + \epsilon_{i,t}$  這個公式所組成的，FF3 是基本的 MKT、SIZE 與 BTM。為了與 HHL 比較，本表所選擇的時間長度為 1955 年 1 月到 2004 年 12 月。

### 3.5 樣本外預測與 CAPM、HHL 及 Simin 模型的比較

HZZb 就所提出的多因子波動度模型執行樣本外預測，並且發現多因子波動度模型的樣本外預測較為精準。本文採用 FF5 因子波動度模型採取向前一期的樣本外預測法，根據  $10 \times 10$  投資組合，挑出 1990 年 1 月到 2009 年 12 月 240 個觀測值，結果列表於表 7，基於篇幅限制，我們每隔四組挑選一個組合進行研究，並且登記 DM 檢定的正值、負值、顯著正值、顯著負值與  $\bar{d}$  的平均數。由於樣本外績效比較並非本文主要研究，因此並不將 100 個投資組合的結果全部列表，僅以每隔七組的方式列出其中 15 個投資組合。DM 檢定的結果則彙總於表底，嚴格說來，動態因子波動度的預測能力較個別模型的預測能力為佳。<sup>7</sup> 當 DM 指標為正，顯示動態因子波動度的預測誤差小於其他模型，我們共記錄了 72 個相對於 CAPM，以及 100 個相對於 HHL 模型與 Simin (2008) 模型的正向數目。但顯著為正的個別為 32 個、64 個及 60 個，平均的  $\bar{d}$  值分別為 0.695、0.651 與 0.715。

<sup>7</sup> 不過目前樣本外預測的方法論也在精進中，Dangl and Halling (2012) 採用一個以貝氏架構為基礎的時間變異係數並以 S&P500 指數的月報酬進行樣本外預測，Ferreira and Santa-Clara (2011) 提出一個分別估計再加總 (the sum-of-the-parts) 方法，也就是將股利對市價比、盈餘成長和本益比運用樣本外預測分別與歷史平均報酬進行比較研究。

表 7 樣本外預測的績效比較

Portfolio	CAPM vs MFP	HHL vs MFP	Simin vs MFP
2	0.03	0.03	0.06
9	0.09	0.09	0.06
16	0.05	0.20	0.09
23	0.07	0.10	0.11
30	-0.56	0.54	0.57
37	0.11	0.13	0.10
44	-1.21	1.15	1.21
51	0.23	0.10	0.14
58	-1.07	0.99	1.05
65	1.39	1.29	1.38
72	-1.73	0.31	1.44
79	2.20	2.09	2.49
86	0.09	0.20	0.11
93	1.31	1.23	1.30
100	3.88	3.51	3.78
$\bar{d}$ 的平均數	0.70	0.65	0.71
100 個組合中 $DM$ 為正的數目	72	100	100
100 個組合中 $DM$ 為負的數目	28	0	0
100 個組合中 $DM$ 顯著為正的數目	32	64	60
100 個組合中 $DM$ 顯著為負的數目	6	0	0

資料來源：K. R. French 網站，該資料由 CRSP 資料庫取得，自 1990 年 1 月至 2009 年 12 月。

說明：1. 本表主要探討多因子波動度模型與傳統 CAPM 模型、HHL 模型及 Simin 模型之間，在樣本外預測上的表現孰優。CAPM 的公式就是無風險報酬加上風險溢酬，HHL 模型為本模型之來源模型，其公式如下：  
 $R_{i,t} = E(R_i) + A_i^* K_{i,t-1} + A_i' K_{i,t} + \varepsilon_{i,t}$ 。Simin 模型是以股價歷史報酬為基準所進行的樣本外預測。本文採取向前一期的樣本外預測法，根據  $10 \times 10$  投資組合，挑出 1990 年 1 月到 2009 年 12 月 240 個觀測值，判斷方法是用 Diebold-Mariano 檢定，公式為： $DM = \bar{d} / \sqrt{2\pi \hat{f}_d(0)/T}$ 。由於篇幅限制，本表僅挑選 15 組比較結果摘錄，所有比較資訊則彙整在表下，包括  $DM$  為正的數目、 $DM$  顯著為正的數目、 $DM$  為負的數目、 $DM$  顯著為負的數目，的顯著統計量為  $t$  統計量。

2. \*、\*\* 與 \*\*\* 分別表示 10%、5% 與 1% 顯著水準。

這個樣本外預測主要是進行橫斷面迴歸的向前一期預測計算估計值與實際值的預測誤差，我們推估的時間是 2011 年 1 月到 2013 年 12 月，即便採用的是五因子組合報酬與 CAPM、HHL 及 Simin 做比較，自然是動態因子波動度的預測較為精確。<sup>8</sup>

從  $\bar{d}$  的平均值來看，第二欄較第三欄與第一欄為小，隱含著 HHL 模型可能會比 CAPM 模型與 Simin 的歷史平均報酬為佳，然而這可能需要更多的證據來支撐這個看法，本文建議留作後續研究建議的參考。

由於本文橫斷面迴歸  $R_{OLS}^2$  低於 Petkova (2006) 的 77%，且時間數列迴歸所求得的  $\eta$  值，其結果可能存在著估計不精緻的問題，於是進行蒙地卡羅模擬實驗，在未列表的實證中得知，經由蒙地卡羅模擬得到的  $\eta$  值與 Petkova (2006) 所得結果一致，標準誤較大且有向下偏誤現象，顯示動態因子波動度並非無效因子，對平均超常報酬有一定程度的作用。

#### 4. 結論與建議

Fama and French (2015) 以市場組合、公司規模、價值效果、營運利潤與投資類型，建立 FF5 因子模型，本文則採取 UKF 法及 GARCH(1,1) 構建條件變異數方程式，形成一個動態因子波動度模型，討論這個動態模型在橫斷面上後設的事後因子對預期報酬率的影響，以及在時間數列上採取  $10 \times 10$  組合的方式所產生的效果，並與其他模型比較，再進行樣本外預測了解實證結果和精緻性。所得結論是在橫斷面上用無跡卡爾曼分析法估計公司特有風險波動度，發現市場組合波動度對預期報酬率的影響為負向效果，公司規模與價值效果對預期報酬率的影響為正向效果，營運利潤對預期報酬的

---

<sup>8</sup> 本文後來改用 HHL 的時間長度，重測後  $R_{OLS}^2$  為 28.3% 與  $R_{GLS}^2$  為 16.4%，結果與表 4 近似。

影響為負向效果，投資類型對預期報酬的影響為正向效果，這說明了公司特有風險的組成因素對股價報酬的影響，令我們更進一步地了解定價偏誤的原因。本文特色是在樣本內討論加入公司特有風險波動度的五因子模型對平均預期報酬的影響，並且討論樣本外預測及幾個類似脈絡的模型在樣本外預測上的比較。

本文發掘公司特有風險在橫斷面與時間數列上對股價預期報酬的影響，精細計算每一種層面的效果，試圖解決模型設定偏誤與分析特有風險波動度對預期報酬在 100 個組合上的影響，解讀正面效果與負面效果的差異之後，並運用樣本外預測來鞏固實證結果。發現條件波動度對大多數的組合效果為負向效果，且橫斷面上的實證探討上落後一期的動態因子波動度對預期報酬的影響亦為負向效果，部分支持 Ang et al. (2006, 2009) 的主張。可是運用時間數列 GARCH 來建構公司特有風險波動度，卻發現無論是營運利潤及投資類型都為正面影響。與許多運用時間數列探討個別公司計算波動度的文獻看法一致，也支持 Bali and Cakici (2008) 的實證。可是 *MKT*、*SIZE* 與 *BTM* 的結果在 100 個組合中各種表現都有（不顯著、顯著的正向效果與顯著的負向效果），所得結果與 HZZb 的多因子波動度模型一致，可是影響預期報酬的係數值範圍較為集中，推論是營運利潤與投資類型因子發揮了吸納波動度的效果。

## 附錄 無跡卡爾曼濾波法的實施過程 (Särkkä, 2007)

一個濾波模型在正常的白色噪音下所形成的條件為  $e(t) = d\beta(t)/dt$ ， $n(t) = d\eta(t)dt$ ，則  $[d\chi(t)/dt] = f(x(t), t) + L(t)e(t)$ ，則差分函數為  $z(t) = h(x(t), t) + v(t)n(t)$ ，此處  $e(t)$  與  $n(t)$  為白色噪音過程，同為  $Q_c(t)$  與  $R_c(t)$  的功率譜密度值。依據最適貝斯連續時間濾波原則可以遞迴方式求得事後分配：

$$D(x(t) | \{y(T) : 0 \leq T \leq t\}), \quad (A1)$$

這個方程式被稱為 Kushner-Stratonovich 方程式，以隨機部分差分方程式來求解濾波問題。貝斯連續間斷濾波的目標是為了遞迴計算其事後分配  $p(x(t_k) | y_1, \dots, y_k)$ ，此處  $t_k$  是測量  $y_k$  的時間，卡爾曼濾波是給定一個最適當的分配事後最佳化預測，以從已知時間的數據推估下一個時間的數據。在理論上，此方案的解決有兩個步驟，第一為預測步驟，利用 Kolomgorov 向前部分差分方程是根據  $t_{k-1}$  這個已知的事後機率密度做為邊界條件來找到一個在時間  $t_k$  可預測的機率密度。第二則為修正步驟，運用貝斯法則從預測步驟的預期機率密度與測量  $y_k$  的概似函數計算在步驟  $t_k$  的狀態事後機率密度函數。  
無跡轉換：無跡轉換是運用高斯漸近法去做一個隨機變數的聯合分配  $x$  和  $y$ ，此時隨機變數  $y$  是由高斯隨機變數  $x$  的一種非線性轉換所求得：

$$\begin{aligned} x &\sim N(m, p), \\ y &= g(x), \end{aligned} \quad (A2)$$

此處  $x \in \mathbb{R}^n$ ， $y \in \mathbb{R}^m$ ，及  $g: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  基本上是一個一般非線性函數，無跡轉換是將一個已經被決定好的  $\sigma$  找出固定的數字，用來直接捕捉  $x$  的原始分配之平均數與共變數，這些  $\sigma$  是非線性的而且轉換值的平均數與共變數是可估算的，無跡轉換顯然與蒙地卡羅模擬

(Monte Carlo simulation) 不同。因為  $\sigma$  是被事先決定的。

依據高斯漸進法，無跡轉換可形成下式：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} m \\ \mu_v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & C_U \\ C_U^T & S_U \end{pmatrix}\right), \quad (\text{A3})$$

$x \in \mathfrak{R}^n, y \in \mathfrak{R}^m$  是聯合機率密度函數，無跡轉換是以下過程：

$$\begin{aligned} x^0 &= m, \\ x^{(i)} &= m + \left[ \sqrt{(n+\lambda)p} \right]_i, i=1, \dots, n, \\ x^{(i)} &= m - \left[ \sqrt{(n+\lambda)p} \right]_{i-n}, i=n+1, \dots, 2n, \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

又可加權計算出：

$$\begin{aligned} \omega_0^{(m)} &= \frac{\lambda}{(n+\lambda)}, \\ \omega_0^{(e)} &= \frac{\lambda}{(n+\lambda) + (1-\alpha^2 + \beta)}, \\ \omega_i^{(m)} &= \frac{1}{\{2(n+\lambda)\}}, i=1, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

此處  $(2n+1)\sigma$  的集合是  $(n \times n)$  矩陣所形成的  $\sqrt{(n+\lambda)p}$  求得，且  $\lambda$  為估計參數被定義為  $\lambda = \alpha^2(n+k) - n$ ， $\alpha, \beta$  與  $k$  都是正規化常數項。常數  $\alpha$  決定繞  $\bar{x}$  的  $\sigma$  的散布點和常被用來做為最小正值， $k$  是第 2 個估計參數，其值為零或  $3-L$ ，這些  $\sigma$  被非線性函數  $f$  定義如下：

$$Y_i = f(x_i), i=0, 1, \dots, 2L, \quad (\text{A6})$$

$Y$  的平均數和共變數本身是接近一個事後  $\sigma$  加權的樣本平均數與共變數，其中

$$\bar{Y} = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(m)} y_i, \quad S_y = \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} (y_i - \bar{y})(y_i - \bar{y})' \circ \quad (\text{A7})$$

此處  $\omega^{(m)}$  與  $\omega^{(c)}$  為權重，給定：

$$\omega_0^{(m)} = \frac{\lambda}{(n + \lambda)}, \quad \omega_0^{(c)} = \frac{\lambda}{(n + \lambda) + (1 - \alpha^2 + \beta)},$$

$$\omega_i^{(m)} = \omega_i^{(c)} = \frac{1}{2(n + \lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n, \quad (\text{A8})$$

上標  $(m)$  與  $(c)$  被指為事後平均數為共變數的權重，且  $\beta$  是共變數的修正參數被用來併入  $x$  的事前事件資訊。估計參數  $\lambda$  被定義為(A9)式：

$$\lambda = \alpha^2 (n + \kappa) - n \circ \quad (\text{A9})$$

在  $\alpha, \beta, \kappa$  為正的常數項下每一個  $\sigma$  為(A10)式：

$$y^{(i)} = g(x^{(i)}), \quad i = 0, \dots, 2n \circ \quad (\text{A10})$$

$Y$  的平均數與共變數可計算如下：

$$\mu_U \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} y^{(i)},$$

$$S_U \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (y^{(i)} - \mu_U)(y^{(i)} - \mu_U)^T \circ \quad (\text{A11})$$

$X$  與  $y$  的橫斷面共變數可以(A12)來估計：

$$C_U \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (x^{(i)} - m)(y^{(i)} - \mu_U)^T \circ \quad (\text{A12})$$

無跡卡爾曼濾波法是一種間斷時間的濾波演算法，使用無跡轉換計算濾波問題的概似解決方案，如(A13)式：



$$\begin{aligned}x_k &= f_d(x_{k-1}, k-1) + q_{k-1}, \\y_k &= h_d(x_k, k) + r_k,\end{aligned}\tag{A13}$$

此處  $x_k \in \mathfrak{R}^n$  為狀態變數，是衡量變數， $q_{k-1} \in \mathfrak{R}^n$  屬於高斯過程噪音，且  $q_{k-1} \sim N(0, Q_{k-1})$  而  $r_k \in \mathfrak{R}^m$  乃是高斯衡量噪音 ( $r_k \sim N(0, R_k)$ )。  $x_0$  起始點的平均數與共變數為  $m_0$  與  $S_0$ 。

## 參考文獻

- 陳家彬、劉映興、楊踐為 Chen, Chia-Pin, Ying-Sing Liu and Jack J. W. Yang (2010), 「三因子模型在多頭月及空頭月之條件異質性與雙重時間變動貝他值」“Conditional Heteroscedasticity, Dual Time-Varying Betas in Bull and Bear Months of the Three-Factor Model”, 證券市場發展季刊 Review of Securities & Futures Markets, 22:1, 1-27。(in Chinese with English abstract)
- Adrian, T. and J. Rosenberg (2008), “Stock Returns and Volatility: Pricing the Short-Run and Long-Run Components of Market Risk,” *The Journal of Finance*, 63:6, 2997-3030.
- Aharoni, G., B. Grundy and Q. Zeng (2013), “Stock Returns and the Miller Modigliani Valuation Formula: Revisiting the Fama French Analysis,” *Journal of Financial Economics*, 110:2, 347-357.
- Ang, A. and G. Bekaert (2007), “Stock Return Predictability: Is It There?” *The Review of Financial Studies*, 20:3, 651-707.
- Ang, A., R. J. Hodrick, Y. Xing and X. Zhang (2006), “The Cross-Section of Volatility and Expected Returns,” *The Journal of Finance*, 61:1, 259-299.
- Ang, A., R. J. Hodrick, Y. Xing and X. Zhang (2009), “High Idiosyncratic Volatility and Low Returns: International and Further U.S. Evidence,” *Journal of Financial Economics*, 91:1, 1-23.
- Angelidis, T. and N. Tessaromatis (2009), “Idiosyncratic Risk Matters! A Regime Switching Approach,” *International Review of Economic & Finance*, 18:1, 132-141.
- Arshanapalli, B., F. J. Fabozzi and W. Nelson (2013), “The Role of Jump Dynamics in the Risk-Return Relationship,” *International Review of Financial Analysis*, 29, 212-218.

- Baker, M. and J. Wurgler (2000), "The Equity Share in New Issues and Aggregate Stock Returns," *The Journal of Finance*, 55:5, 2219-2257.
- Bali, T. G. and N. Cakici (2008), "Idiosyncratic Volatility and the Cross Section of Expected Returns," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 43:1, 29-58.
- Bali, T. G., N. Cakici, X. Yan and Z. Zhang (2005), "Does Idiosyncratic Risk Really Matter?" *The Journal of Finance*, 60:2, 905-929.
- Bauer, G. H. and K. Vorkink (2011), "Forecasting Multivariate Realized Stock Market Volatility," *Journal of Econometrics*, 160:1, 93-101.
- Belo, F., X. Lin and S. Bazdresch (2014), "Labor Hiring, Investment, and Stock Return Predictability in the Cross Section," *Journal of Political Economy*, 122:1, 129-177.
- Bergbrant, M. (2010), "Trading Costs and the Relation between Idiosyncratic Volatility and Returns," University of South Florida Working Paper No. 1-33.
- Black, F. and M. Scholes (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81:3, 637-654.
- Boudoukh, J., R. Michaely, M. Richardson and M. R. Roberts (2007), "On the Importance of Measuring Payout Yield: Implications for Empirical Asset Pricing," *The Journal of Finance*, 62:2, 877-915.
- Brandt, M. W. and Q. Kang (2004), "On the Relationship between the Conditional Mean and Volatility of Stock Returns: A Latent VAR Approach," *Journal of Financial Economics*, 72:2, 217-257.
- Breen, W., L. R. Glosten and R. Jagannathan (1989), "Economic Significance of Predictable Variations in Stock Index Returns," *The Journal of Finance*, 44:5, 1177-1189.
- Brennan, M. J., A. W. Wang and Y. Xia (2004), "Estimation and Test of A Simple Model of Intertemporal Capital Asset Pricing," *The Journal of Finance*, 59:4, 1743-1776.

- Campbell, J. Y. (1987), "Stock Returns and the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 18:2, 373-399.
- Campbell, J. Y. and R. J. Shiller (1988), "Stock Prices, Earnings, and Expected Dividends," *The Journal of Finance*, 43:3, 661-676.
- Campbell, J. Y. and R. J. Shiller (1998), "Valuation Ratios and the Long-Run Stock Market Outlook," *The Journal of Portfolio Management*, 24:2, 11-26.
- Campbell, J. Y. and S. B. Thompson (2008), "Predicting Excess Stock Returns Out of Sample: Can Anything Beat the Historical Average?" *The Review of Financial Studies*, 21:4, 1509-1531.
- Campbell, J. Y. and T. Vuolteenaho (2004), "Bad Beta, Good Beta," *The American Economic Review*, 94:5, 1249-1275.
- Cochrane, J. H. (2011), "Presidential Address: Discount Rates," *The Journal of Finance*, 66:4, 1047-1108.
- Cont, R. (2001), "Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues," *Quantitative Finance*, 1:2, 223-236.
- Dangl, T. and M. Halling (2012), "Predictive Regressions with Time-Varying Coefficients," *Journal of Financial Economics*, 106:1, 157-181.
- Davis, J. L., E. F. Fama and K. R. French (2000), "Characteristics, Covariance, and Average Returns: 1929 to 1997," *The Journal of Finance*, 55:1, 389-406.
- Diebold, F. X. and R. S. Mariano (2002), "Comparing Predictive Accuracy," *Journal of Business & Economic Statistics*, 20:1, 134-144.
- Dow, C. H. (1920), *Scientific Stock Speculation*, New York: Magazine of Wall Street.
- Fama, E. F. and K. R. French (1988), "Dividend Yields and Expected Stock Returns," *Journal of Financial Economics*, 22:1, 3-25.
- Fama, E. F. and K. R. French (1989), "Business Conditions and Expected

Returns on Stocks and Bonds,” *Journal of Financial Economics*, 25:1, 23-49.

Fama, E. F. and K. R. French (1993), “Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds,” *Journal of Financial Economics*, 33:1, 3-56.

Fama, E. F. and K. R. French (1996), “Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies,” *The Journal of Finance*, 51:1, 55-84.

Fama, E. F. and K. R. French (2001), “Disappearing Dividends: Changing Firm Characteristics or Lower Propensity to Pay?” *Journal of Financial Economics*, 60:1, 3-43.

Fama, E. F. and K. R. French (2006), “The Value Premium and the CAPM,” *The Journal of Finance*, 61:5, 2163-2185.

Fama, E. F. and K. R. French (2012), “Size, Value, and Momentum in International Stock Returns,” *Journal of Financial Economics*, 105:3, 457-472.

Fama, E. F. and K. R. French (2015), “A Five-Factor Asset Pricing Model,” *Journal of Financial Economics*, 116:1, 1-22.

Fama, E. F. and G. W. Schwert (1977), “Asset Returns and Inflation,” *Journal of Financial Economics*, 5:2, 115-146.

Ferreira, M. A. and P. Santa-Clara (2011), “Forecasting Stock Market Returns: The Sum of the Parts is More than the Whole,” *Journal of Financial Economics*, 100:3, 514-537.

Foster, F. D., T. Smith and R. E. Whaley (1997), “Assessing Goodness-of-Fit of Asset Pricing Models: The Distribution of the Maximal  $R^2$ ,” *The Journal of Finance*, 52:2, 591-607.

French, K. R. (2016), Data Library, <http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/index.html>.

French, K. R., G. W. Schwert and R. F. Stambaugh (1987), “Expected Stock Returns and Volatility,” *Journal of Financial Economics*, 19:1,

3-29.

- Fu, F. (2009), "Idiosyncratic Risk and the Cross-Section of Expected Stock Returns," *Journal of Financial Economics*, 91:1, 24-37.
- Ghysels, E., P. Santa-Clara and R. Valkanov (2005), "There Is A Risk-Return Trade-Off after All," *Journal of Financial Economics*, 76:3, 509-548.
- Glosten, L. R., R. Jagannathan and D. E. Runkle (1993), "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks," *The Journal of Finance*, 48:5, 1779-1801.
- Gospodinov, N., R. Kan and C. Robotti (2014), "Spurious Inference in Unidentified Asset-Pricing Models," Rotman School of Management Working Paper No. 2580391.
- Goyal, A. and P. Santa-Clara (2003), "Idiosyncratic Risk Matters!" *The Journal of Finance*, 58:3, 975-1007.
- Guo, H., H. Kassa and M. F. Ferguson (2014), "On the Relation between EGARCH Idiosyncratic Volatility and Expected Stock Returns," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 49:1, 271-296.
- Guo, H. and R. Savickas (2008), "Average Idiosyncratic Volatility in G7 Countries," *The Review of Financial Studies*, 21:3, 1259-1296.
- Guo, H. and R. F. Whitelaw (2006), "Uncovering the Risk-Return Relation in the Stock Market," *The Journal of Finance*, 61:3, 1433-1463.
- Hammoudeh, S. M., Y. Yuan and M. McAleer (2009), "Shock and Volatility Spillovers among Equity Sectors of the Gulf Arab Stock Markets," *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 49:3, 829-842.
- Han, Y., K. Yang and G. Zhou (2013), "A New Anomaly: The Cross-Sectional Profitability of Technical Analysis," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 48:5, 1433-1461.
- Harvey, A., E. Ruiz and E. Sentana (1992), "Unobserved Component Time

Series Models with ARCH Disturbances,” *Journal of Econometrics*, 52:1-2, 129-157.

He, Z. L., S. W. Huh and B. S. Lee (2010), “Dynamic Factors and Asset Pricing,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 45:3, 707-737.

He, Z. L., J. Zhu and X. Zhu (2015a), “Dynamic Factors and Asset Pricing: International and Further U.S. Evidence,” *Pacific-Basin Finance Journal*, 32, 21-39.

He, Z. L., J. Zhu and X. Zhu (2015b), “Multi-Factor Volatility and Stock Returns,” *Journal of Banking & Finance*, 61:S2, 132-149.

Henkel, S. J., J. S. Martin and F. Nadari (2011), “Time-Varying Short-Horizon Predictability,” *Journal of Financial Economics*, 99:3, 560-580.

Hjalmarsson, E. (2010), “Predicting Global Stock Returns,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 45:1, 49-80.

Huang, S. C. (2008), “Online Option Price Forecasting by Using Unscented Kalman Filters and Support Vector Machines,” *Expert Systems with Applications*, 34:4, 2819-2825.

Huang, W., Q. Liu, S. G. Rhee and L. Zhang (2010), “Return Reversals, Idiosyncratic Risk, and Expected Returns,” *The Review of Financial Studies*, 23:1, 147-168.

Jagannathan, R. and Z. Wang (1996), “The Conditional CAPM and the Cross-Section of Expected Returns,” *The Journal of Finance*, 51:1, 3-53.

Kan, R. and G. Zhou (1999), “A Critique of the Stochastic Discount Factor Methodology,” *The Journal of Finance*, 54:4, 1221-1248.

Kan, R. and G. Zhou (2001), “Empirical Asset Pricing: The Beta Method versus the Stochastic Discount Factor Method,” University of Toronto and Washington University Working Paper.

- Kang, J., T. S. Kim, C. Lee and B. K. Min (2011), "Macroeconomic Risks and the Cross-Section of Stock Returns," *Journal of Banking & Finance*, 35:12, 3158-3173.
- Kim, D. (1995). "The Errors in the Variables Problem in the Cross-Section of Expected Stock Returns," *The Journal of Finance*, 50:5, 1605-1634.
- King, M., E. Sentana and S. Wadhvani (1994), "Volatility and Links between National Stock Markets," *Econometrica*, 62:4, 901-933.
- Kothari, S. P. and J. Shanken (1997), "Book-to-Market, Dividend Yield, and Expected Market Returns: A Time-Series Analysis," *Journal of Financial Economics*, 44:2, 169-203.
- Lettau, M. and S. Ludvigson (2001), "Consumption, Aggregate Wealth, and Expected Stock Returns," *The Journal of Finance*, 56:3, 815-849.
- Lewellen, J., S. Nagel and J. Shanken (2010), "A Skeptical Appraisal of Asset Pricing Tests," *Journal of Financial Economics*, 96:2, 175-194.
- Li, J. (2013), "An Unscented Kalman Smoother for Volatility Extraction: Evidence from Stock Prices and Options," *Computational Statistics & Data Analysis*, 58, 15-26.
- Lo, A. W. and A. C. MacKinlay (1990), "Data-Snooping Biases in Tests of Financial Asset Pricing Models," *The Review of Financial Studies*, 3:3, 431-467.
- Ludvigson, S. C. and S. Ng (2007), "The Empirical Risk-Return Relation: A Factor Analysis Approach," *Journal of Financial Economics*, 83:1, 171-222.
- McCausland, W. J., S. Miller and D. Pelletier (2011), "Simulation Smoothing for State-Space Models: A Computational Efficiency Analysis," *Computational Statistics & Data Analysis*, 55:1, 199-212.
- Neely, C. J., D. E. Rapach, J. Tu and G. Zhou (2014), "Forecasting the Equity Risk Premium: The Role of Technical Indicators," *Management Science*, 60:7, 1772-1791.



- Nelson, C. R. (1976), "Inflation and Rates of Return on Common Stocks," *The Journal of Finance*, 31:2, 471-483.
- Novy-Marx, R. (2013), "The Other Side of Value: The Gross Profitability Premium," *Journal of Financial Economics*, 108:1, 1-28.
- Pástor, L. and R. F. Stambaugh (2009), "Predictive Systems: Living with Imperfect Predictors," *The Journal of Finance*, 64:4, 1583-1628.
- Peterson, D. R. and A. R. Smedema (2011), "The Return Impact of Realized and Expected Idiosyncratic Volatility," *Journal of Banking & Finance*, 35:10, 2547-2558.
- Petkova, R. (2006), "Do the Fama-French Factors Proxy for Innovations in Predictive Variable?" *The Journal of Finance*, 61:2, 581-612.
- Pontiff, J. and L. D. Schall (1998), "Book-to-Market Ratios as Predictors of Market Returns," *Journal of Financial Economics*, 49:2, 141-160.
- Rapach, D. E., J. K. Strauss and G. Zhou (2010), "Out-of-Sample Equity Premium Prediction: Combination Forecasts and Links to the Real Economy," *The Review of Financial Studies*, 23:2, 821-862.
- Rytchkov, O. (2012), "Filtering Out Expected Dividends and Expected Returns," *The Quarterly Journal of Finance*, 2:3, 27-83.
- Särkkä, S. (2007), "On Unscented Kalman Filtering for State Estimation of Continuous-Time Nonlinear Systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52:9, 1631-1641.
- Shanken, J. (1985), "Multivariate Tests of the Zero-Beta CAPM," *Journal of Financial Economics*, 14:3, 327-348.
- Shephard, N. (2005), *Stochastic Volatility: Selected Reading*, Oxford: Oxford University Press.
- Simin, T. (2008), "The Poor Predictive Performance of Asset Pricing Models," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 43:2, 355-380.
- Stock, J. H. and M. W. Watson (2005), "Implications of Dynamic Factor

- Models for VAR Analysis,” NBER Working Paper No. 11467.
- Vassalou, M. (2003), “News Related to Future GDP Growth as a Risk Factor in Equity Returns,” *Journal of Financial Economics*, 68:1, 47-73.
- Wang, M. S. (2013), “Idiosyncratic Volatility and the Expected Stock Returns for Exploring the Relationship with Panel Threshold Regression,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 20:2, 113-129.
- Wei, S. X. and C. Zhang (2005), “Idiosyncratic Risk Does Not Matter: A Re-Examination of the Relationship between Average Returns and Average Volatilities,” *Journal of Banking & Finance*, 29:3, 603-621.
- Welch, I. and A. Goyal (2008), “A Comprehensive Look at the Empirical Performance of Equity Premium Prediction,” *The Review of Financial Studies*, 21:4, 1455-1508.
- Yin, W. and J. Li (2014), “Macroeconomic Fundamentals and the Exchange Rate Dynamics: A Non-Arbitrage Macro-Finance Approach,” *Journal of International Money and Finance*, 41, 46-64.

## Dynamic Factors Volatility and Expected Stock Return Based on the Unscented Kalman Filter Method and GARCH Model

Wang, Mu-Shun and Chihuang Lin

### Abstract

This paper proposes a dynamic factors volatility model and examines its cross-sectional and time-varying impacts on assets prices. The dynamic factors were extracted by using both the unscented Kalman filtering method and the GARCH model. We then investigated the relationship between the volatility of the portfolio dynamic factors and the portfolio returns. In contrast to the static model, the dynamic factors incorporate features of Fama and French 5-factor models, which capture the characteristics of market portfolio, size, value effect, operating profitability, and investment patterns in average returns. We provide evidence that the ex post and lagged ex post factors can improve cross-sectional explanatory power and can increase the predictability of portfolio returns both in-sample and out-of-sample. Our analyses demonstrate that the size and book-to-market sorted portfolios earn a significant positive variance risk premium. However, the dynamic factors predicted by market value have significant negative effects on portfolio returns. We also perform the one-prior-period out-of-sample Diebold-Mariano test of forecasting accuracy paired with other models and find that the dynamic factors have significant effects on the risk premia of both operating profitability and investment policies. This finding supports the theoretical prediction of Bali and Cakici (2008). Finally, our evidence is robust to various specifications and estimation results.

Keywords: Idiosyncratic Volatility, Out-of-Sample Predictability, Unscented Kalman Filter, Pricing Bias, Dynamic Factors Volatility

JEL Classification: C23, G32, L25, M21

---

Wang, Mu-Shun, Department of Banking and Finance, Kainan University, No. 1, Kainan Rd., Luzhu Dist., Taoyuan City 33857, Taiwan, R.O.C., Tel: 886-3-3412500 ext. 6123, E-mail: [sunrise034@yahoo.com.tw](mailto:sunrise034@yahoo.com.tw). Chihuang Lin, Department of Banking and Finance, Kainan University, No. 1, Kainan Rd., Luzhu Dist., Taoyuan City 33857, Taiwan, R.O.C., Tel: 886-3-3412500 ext. 1702, E-mail: [chlin@mail.knu.edu.tw](mailto:chlin@mail.knu.edu.tw). The authors would like to thank the anonymous referees and editors. The remaining errors and omissions are the responsibility of the authors alone.

Received 22 January 2015; revised 26 May 2015; accepted 2 September 2016.