評估具厚尾分配風險之避險效果

朱香蕙、張榮顯、林玉森*

摘　要

本文探討金融資產報酬為非常態分配時，在最適避險策略的效果。我們首度採用極小化 student-t 分配之風險值及條件風險值來估算避險比率。以英國金融時報 100 指數、台灣加權股價指數、黃金與西德州原油為現貨及其對應之期貨為避險工具，探討極小化 Student-t 風險值與極小化 Student-t 條件風險值之避險效果，是否較極小化變異數、極小化 Cornish-Fisher (Cornish and Fisher, 1937) 風險值、極小化 Cornish-Fisher 條件風險值模型等研究方法，提供較佳之避險績效。實證結果顯示，極小化 Student-t 風險值與極小化 Student-t 條件風險值避險法亦使避險組合分配產生高狹峰，但在風險值與條件風險值減少程度上優於其他方法。最後，利用回溯測試檢視各模型評估市場風險的能力。結果顯示只有極小化 Student-t 風險值法與極小化 Student-t 條件風險值通過檢驗。代表極小化 Student-t 風險值與極小化 Student-t 條件風險值法不但在避險績效上優於其他方法並且能精準地預測風險值。

關鍵詞：極小化變異數、t 分配風險值、避險比率、回溯測試
JEL 分類代號：C10, G11, G32

* 三位作者分別為聯絡作者：朱香蕙，國立暨南國際大學財務金融學系助理教授，54561 南投縣埔里鎮大學路 1 號，電話：04-92910960 轉 4622，E-mail: hhchu@ncnu.edu.tw。張榮顯，國立暨南國際大學財務金融學系助理教授，54561 南投縣埔里鎮大學路 1 號，電話：04-92910960 轉 4693，E-mail: jschang@ncnu.edu.tw。林玉森，國立暨南國際大學財務金融學系碩士生，54561 南投縣埔里鎮大學路 1 號，電話：04-92910960，E-mail: s98214519@mail1.ncnu.edu.tw。作者們由衷感謝編輯委員與匿名審查委員悉心指正與寶貴建議。
投稿日期：民國 101 年 3 月 6 日；修訂日期：民國 102 年 4 月 16 日；
接受日期：民國 103 年 1 月 7 日。

1. 前言

隨著投資商品之創新與金融市場交易的蓬勃發展，在追求高報酬之際，其潛在風險亦隨之上揚，避險的衡量就成為重要的課題。極小化變異避險比率 (minimum variance hedge ratio) 即在極小化變異數的架構下，所求出之最適避險比率 (optimal hedge ratio) 是學界與業界最常採用的避險方法。變異數為同時考量上方與下方的風險衡量工具，然而投資人所關心的則是下方風險。Ederington and Salas (2008) 指出極小化變異數模型的避險績效不佳，無法準確預測風險。Harris and Shen (2006) 則表示利用極小變異數的方法所求出之最適避險比率，雖可以降低避險投資組合的標準差，卻可能因此增加其避險投資組合的偏度和峰度。避險投資組合的風險值 (value at risk, VaR) 和條件風險值 (conditional value at risk, CVaR) 可能比未避險投資組合的風險值和條件風險值大。由於風險值已經廣泛地被業界、金融監理機關與學界用來評估投資的下方風險。投資決策或風險管理亦將風險值當成重要參考依據 (Roy, 1952; Leibowitz and Henriksson, 1989; Jorion, 1996; Campbell et al., 2001; Alexander and Baptista, 2004; Cotter and Hanly, 2006)。因此，該使用什麼工具做為衡量風險的測度，進而改善避險績效是本文關注的議題。

Harris and Shen (2006) 說明當樣本資料為非常態時，使用變異數量測投資組合風險是不適當的。因為變異數沒有考量到投資組合偏態與峰態的行為，所以建議改用風險值和條件風險值作為風險衡量的工具。Harris and Shen (2006) 提出極小化風險值 (minimum-VaR) 與極小化條件風險值 (minimum-CVaR) 的避險策略，利用歷史模擬法在極小化風險值與極小化條件風險值的架構下求得最適避險比率。實證結果顯示，極小化風險值與極小化條件風險值的避險績效較極小化變異數避險法為佳，不但能降低避險投資組合之變異數也使其風險值與條件風險值隨之下降。由於 Harris and Shen (2006)

提出的歷史模擬法是屬於無母數的方法 (non-parametric approach)，歷史模擬法的優點為不需假設歷史資料的分配，直接將歷史資料排序後，取其信賴水準的百分位數為欲估計的風險值。其缺點在於需要有較長的歷史資料來計算風險值。倘若，樣本資料不足或是缺乏極端資料的情況下，容易造成風險值的偏誤 (Alexander and Leigh, 1997; Daníelsson and de Vries, 1997)。有鑑於此，Cao et al. (2010) 提出半參數法 (semi-parametric approach)，應用 Cornish-Fisher (Cornish and Fisher (1937)) 展開式求算極小化風險值與極小化條件風險值之最適避險比率。並且進一步與無母數法、極小化變異數法與半參數法的避險績效做比較。結果顯示，半參數法所決定之避險組合，除了變異數下降外，平均而言風險值與條件風險值降低的幅度也比無母數法、參數法及極小化變異數法大。

Zangari (1996) 應用 Cornish-Fisher 展開式推導出考量偏態與峰態的風險值與條件風險值模型，稱為 Cornish-Fisher 風險值與 Cornish-Fisher 條件風險值。Cornish-Fisher 展開式提供一個未知百分位機率函數 (approximate unknow quantile function) 的近似封閉解，它可以描述資產報酬非常態分配的行為，且具備計算方便的特性。雖然，結合 Cornish-Fisher 展開式的風險值有上述的優點，卻仍然存在潛在的缺點。Simonato (2011) 指出 Cornish-Fisher 展開式會有非單調百分位數函數 (non-monotone quantile function) 出現的可能性。Cao et al. (2010) 實證結果顯示，倘若只看個別避險組合可發現半參數法並不一定優於極小化變異數法。

實證研究顯示金融商品報酬分配不符合常態分配假設，例如：Lo and MacKinlay (1988)、Richardson and Smith (1993)、Zhou (1993)、Kearns and Pagan (1997) 與 Campbell et al. (2001) 等皆指出金融資料呈現厚尾高狹峰的特性。若將常態分配假設之研究方法配適於非常態資料，其結果將會產生偏誤。本文改採 t 分配 (Student-t) 分配來描述資料厚尾的特性。Student-t 分配比常態分配多了自由度的彈性，自由度大小決定趨近或偏離常態分配，當自由度無限大

時，Student-t 分配近似常態分配；反之，自由度接近零，Student-t 分配偏離常態分配，呈現厚尾現象。文獻上實證結果亦支持以 Student-t 分配配適金融商品報酬非常態行為的能力。相關的文獻包括：Praetz (1972)、Blattberg and Gonedes (1974)、Huisman et al. (1998)、McNeil and Frey (2000)、Glasserman et al. (2002) 與 Broda (2012)。這些研究顯示，Student-t 分配比常態分配更適合用來描述具有厚尾特性的資料。因此，本文將 Student-t 風險值與 Student-t 條件風險值應用於避險議題。利用 García-Donato et al. (2001) 提出 Student-t 分配風險值建立極小化風險值法與極小化條件風險值法求得避險比率，希望能提高避險的績效。在實證研究中，選取英國金融時報 100 指數 (financial times stock exchange 100, FTSE 100)、台灣加權股價指數、黃金與西德州原油為現貨及其對應指數期貨為避險工具為例，以極小化變異數、極小化 Cornish-Fisher 風險值、極小化 Cornish-Fisher 條件風險值模型、極小化 Student-t 風險值與極小化 Student-t 條件風險值等方法進行比較，檢視各模型之避險績效。實證結果顯示，本文提出極小化 Student-t 風險值與極小化 Student-t 條件風險值法也會使避險組合分配產生高狹峰，唯風險值與條件風險值減少程度優於其他方法。最後，利用回溯測試 (backtesting) 檢視模型評估市場風險的能力。結果顯示只有極小化 Student-t 風險值法與極小化 Student-t 條件風險值法通過檢驗。代表極小化 Student-t 風險值與極小化 Student-t 條件風險值法不但在避險績效上優於其他方法並且能精準地預測風險值。

本文的架構安排如下：第 1 節為文獻回顧。第 2 節為避險比率、風險值及條件風險值與評估方法的介紹，包括極小化變異數模型、極小化 Cornish-Fisher 風險值模型、極小化 Cornish-Fisher 條件風險值模型、極小化 Student-t 分配風險值與條件風險值模型避險的介紹。並說明檢定風險值估計模型準確性的回溯測試方法，包括 Kupiec (1995) 提出的二項分配檢定法與 Christoffersen (1998) 提出的條件涵蓋檢定法。第 3 節為資料敘述與實證結果。最後為本文之結論。

2. 研究方法

2.1 極小化變異數模型避險

考慮避險投資組合由兩資產所組成，即持有資產一的風險暴露應使用多少單位的資產二的部位來沖銷。假設兩資產之報酬率分別為 r_1 與 r_2 且兩者平均報酬分別為 0，避險投資組合報酬 r_p 表示如下：

$$r_p = r_1 - h \times r_2 \text{，} \tag{1}$$

其中 h 為避險比率。假設兩個資產之變異數分別為 σ_1 與 σ_2，避險投資組合變異數表示如下：

$$\sigma_p^2 = \sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2 - 2h\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2 \text{，} \tag{2}$$

其中 $\rho_{1,2}$ 為兩資產報酬率之相關係數。令 (2) 式對 h 偏微後等於零，可求出最適避險比率如下：

$$h = \rho_{1,2}\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \text{。} \tag{3}$$

2.2 極小化 Cornish-Fisher 風險值模型避險

Jorion (1996) 定義風險值為特定信心水準下，投資組合於特定期間內可能發生之最大損失預估值。在常態分配下，避險投資組合報酬之風險值表示如下：

$$VaR_p(1-\alpha) = -\sigma_p q_p(\alpha) \text{，} \tag{4}$$

其中 σ_p 為投資組合報酬標準差，$1-\alpha$ 為信心水準，$q_p(\alpha)$ 為標準常態分配 $\alpha\%$ 機率的百分位數。例如：$\alpha = 1\%$，$q_p(1\%) = -2.33$。

雖然以極小化變異數法求出之避險比率是業界普遍使用的避險策略，但此避險比率沒有考慮避險投資組合的高階動差。Cao et al. (2010) 考慮投資組合的偏態與峰態的特性，利用 Cornish-Fisher 展開式近似 $q_p(\alpha)$ 求算最適避險比率。[1] 此時，避險投資組合報酬之風險值（ $CF_{VaR_p}(1-\alpha)$ ）表示如下：

$$CF_{VaR_p}(1-\alpha) = -\sigma_p \tilde{q}_p(\alpha; s_p, k_p) \text{，} \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{q}_p(\alpha; s_p, k_p) = c(\alpha) &+ \tfrac{1}{6}[c(\alpha)^2 - 1]s_p \\ &+ \tfrac{1}{24}[c(\alpha)^3 - 3c(\alpha)](k_p - 3) \\ &- \tfrac{1}{36}[2c(\alpha)^3 - 5c(\alpha)]s_p^2 \text{，}\end{aligned}$$

$c(\alpha)$ 為標準常態分配 $\alpha\%$ 機率之臨界值。避險投資組合報酬之偏態 s_p 表示如下：

$$s_p = \frac{\mathrm{E}(r_p^3)}{\sigma_p^3} = \frac{s_1\sigma_1^3 - 3hs_a\sigma_1^2\sigma_2 + 3h^2 s_b\sigma_2^2\sigma_1 - h^3 s_2\sigma_2^3}{(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2 - 2h\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2)^{3/2}} ,$$

其中

$$s_1 = \frac{\mathrm{E}(r_1^3)}{\sigma_1^3} \text{，} s_2 = \frac{\mathrm{E}(r_2^3)}{\sigma_2^3} \text{，} s_a = \frac{\mathrm{E}(r_1^2 r_2)}{\sigma_1^2\sigma_2} \text{，} s_b = \frac{\mathrm{E}(r_2^2 r_1)}{\sigma_2^2\sigma_1} \text{。}$$

避險投資組合報酬之峰態 k_p 式子如下：

$$k_p = \frac{\mathrm{E}(r_p^4)}{\sigma_p^4} = \frac{k_1\sigma_1^4 - 4hk_a\sigma_1^3\sigma_2 + 6h^2 k_b\sigma_2^2\sigma_1^2 - 4h^3 k_c\sigma_2^3\sigma_1 + h^4 k_2\sigma_2^4}{(\sigma_1^2 + h^2\sigma_2^2 - 2h\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2)^2} \text{，}$$

---

[1] Zangari (1996) 利用 Cornish-Fisher 展開式近似 $q_p(\alpha)$，探討考慮偏態與峰態特性的風險值模型。

其中

$$k_1=\frac{\mathrm{E}(r_1^4)}{\sigma_1^4}，k_2=\frac{\mathrm{E}(r_2^4)}{\sigma_2^4}，k_a=\frac{\mathrm{E}(r_1^3 r_2)}{\sigma_1^3\sigma_2}，k_b=\frac{\mathrm{E}(r_2^2 r_1^2)}{\sigma_2^2\sigma_1^2}，k_c=\frac{\mathrm{E}(r_2^3 r_1)}{\sigma_2^3\sigma_1}。$$

令(5)式對 h 一階偏微等於零，定義 $A_1=c(\alpha)-[c(\alpha)^3-3c(\alpha)]/8$，$A_2=[c(\alpha)^2-1]\ /6$，$A_3=[c(\alpha)^3-3c(\alpha)]\ /24$，$A_4=-[2c(\alpha)^3-5c(\alpha)]\ /36$ 利用數值方法可求得極小化 Cornish-Fisher 風險值架構下之最適避險比率，其一階條件表示如下：[2]

$$\left(A_1+A_2 s_p+A_3 k_p+A_4 s_p^2\right)\frac{\partial\sigma_p}{\partial h}$$
$$+\sigma_p\left(A_2\frac{\partial s_p}{\partial h}+A_3\frac{\partial k_p}{\partial h}+2A_4 s_p\frac{\partial s_p}{\partial h}\right)=0。\tag{6}$$

2.3 極小化 Cornish-Fisher 條件風險值模型避險

雖然風險值已廣泛地被業界、金融監理機關與學界使用，但風險值沒有考慮到超過風險值之事件所造成的期望損失，且風險值不具一致性風險度量模型 (coherent measure of risk) 之次可加性。[3] 為了改善這個缺點，Tasche (2002) 提出條件風險值模型來衡量風險。投資組合報酬之條件風險值為給定損失超過風險值水準下的平均數，表示如下：

$$CVaR_p(1-\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1}VaR(x)dx，\tag{7}$$

其中 $(1-\alpha)$ 為信心水準。

[2] 推導說明請參閱附錄 1。

[3] Artzner et al. (1999) 指出次可加性可以保證投資組合的風險小於個別資產風險之和。

Cao et al. (2010) 考慮投資組合偏態與峰態的特性，利用 Cornish-Fisher 展開式將避險投資組合報酬之條件風險值表示如下：

$$
\begin{aligned}
CF_{CVaR_p}(1-\alpha) = & -\sigma_p\left[M_1 + \tfrac{1}{6}(M_2 - 1)s_p\right] \\
& -\sigma_p\left[\tfrac{1}{24}(M_3 - 3M_1)(k_p - 3)\right] \\
& +\sigma_p\left[\tfrac{1}{36}(2M_3 - 5M_1)s_p^2\right], \qquad (8)
\end{aligned}
$$

其中 $M_i = \int_{-\infty}^{c(\alpha)} x^i f(x)dx/\alpha$，$f(x)$ 為標準常態分配的機率密度函數。

令 (8) 式對 h 一階偏微分等於零，利用數值方法可求得極小化 Cornish-Fisher 條件風險值架構下之最適避險比率，其一階條件表示如下：[4]

$$
\begin{aligned}
& \left(B_1 + B_2 s_p + B_3 k_p + B_4 s_p^2\right)\frac{\partial \sigma_p}{\partial h} \\
& +\sigma_p\left(B_2\frac{\partial s_p}{\partial h} + B_3\frac{\partial k_p}{\partial h} + 2B_4 s_p\frac{\partial s_p}{\partial h}\right) = 0, \qquad (9)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
& B_1 = M_1 - \tfrac{1}{8}[M_3 - 3M_1], \; B_2 = \tfrac{1}{6}[M_2 - 1], \\
& B_3 = \tfrac{1}{24}[M_3 - 3M_1], \; B_4 = -\tfrac{1}{36}[2M_3 - 5M_1]。
\end{aligned}
$$

2.4 極小化 Student-t 分配風險值與條件風險值模型避險

2.4.1 Student-t 分配風險值

García-Donato et al. (2001) 假設資產報酬 R_t 符合 Student-t 分

---

4 推導說明請參閱附錄 2。

配，定義 Student-t 分配為 S_t，即 $R_t \sim S_t(0, \nu/\lambda, 2\nu)$。[5] 資產報酬為 Student-t 分配假設下之風險值如下：

$$VaR = -S_{t,2\hat{\nu},\alpha}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\nu}}} \text{。} \tag{10}$$

參照 García-Donato et al. (2001) 使用動差函數估計法 (method of moments estimator) 估計 $\hat{\nu}$、$\hat{\lambda}$。[6] 資產報酬服從 Student-t 分配的第二及第四級主要動差為

$$m_2 = \frac{\lambda}{\nu - 1} \text{，} \tag{11}$$

$$m_4 = 3\frac{\lambda^2}{(\nu-1)(\nu-2)} \text{。} \tag{12}$$

可以將 $\hat{\nu}$、$\hat{\lambda}$ 的估計式以動差來表示如下：

$$\hat{\nu} = \left(\frac{m^4}{3m_2^2} - 1\right)^{-1} + 2 \text{，} \tag{13}$$

$$\hat{\lambda} = m_2(\hat{\nu} - 1) \text{。} \tag{14}$$

將超額峰態係數 (coefficient of excess of kurtosis) 記為 g_2，$g_2 = m_4 / m_2^2 - 3$。以 g_2 代入 (13) 式及 (14) 式，可以得到

---

5 假設隨機變數 X 服從平均數為0、規模參數為 β、及自由度為 γ 的Student-t 分配，亦即 $X \sim S_t(0, \beta, \gamma)$，其機率密度函數表示如下：

$$f(x, \beta, \gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}\left(1+\frac{\beta x^2}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \text{，}$$

其中 Γ 為 Gamma 函數。

6 García-Donato et al. (2001) 表示由於最大概似估計法(maximum likelihood estimator) 在估計參數上比較複雜，而動差函數估計法具有一致性。當樣本夠大時，則動差函數估計法與最大概似估計法會是一致的，因此建議使用動差函數估計法估計 $\hat{\nu}$ 及 $\hat{\lambda}$。

$$\hat{v} = 3g_2^{-1} + 2 \text{ ，} \tag{15}$$

$$\hat{\lambda} = m_2(3g_2^{-1} + 1) \text{ 。} \tag{16}$$

推導出 Student-t 分配風險值表示如下：

$$VaR = -S_{t,2\hat{v},\alpha}\sqrt{m_2}\sqrt{\frac{3g_2^{-1}+1}{3g_2^{-1}+2}} \text{ ，} \tag{17}$$

其中 $2\hat{v}$ 為自由度，$(1-\alpha)$ 為信心水準。

2.4.2 Student-t 分配條件風險值模型

資產報酬為 Student-t 分配假設下之條件風險值如下：

$$CVaR_p(1-\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} VaR(x)dx \text{，} \tag{18}$$

其中 $VaR(x)$ 為 Student-t 分配風險值。

2.4.3 極小化 Student-t 分配風險值與條件風險值避險

本文參照 Harris and Shen (2006) 建議的格子搜尋法 (grid search approach) 求算極小化 Student-t 風險值法與極小化 Student-t 條件風險值法之避險比率。假設避險比率為 0、0.001、0.002、0.003、…、0.999、1，共 1001 個避險比率，利用 1001 個避險比率建構出 1001 組投資組合報酬，配合 Student-t 分配的風險值算出 1001 個風險值，從中選出最小的風險值後，再往回找出該風險值的避險比率，本研究稱此方法為「極小化 Student-t 風險值避險法」。同理，極小化 Student-t 條件風險值法的避險比率算法類似極小化 Student-t 風險值避險法。

2.5 回溯測試

在探討不同模型的優劣部分，根據 1996 年巴賽爾資本協定

(Basel Capital Accord, BCA) 建議以回溯測試來檢定風險值估計模型的準確性，其目的在於計算某段時間內，實際損失超過所估算風險值的次數是否與預期的次數一致。本文採用 Kupiec (1995) 提出的 Kupiec 二項分配檢定法與 Christoffersen (1998) 提出的 Christoffersen 條件涵蓋檢定法兩種方法，藉此來檢視風險值模型評估市場風險的能力。

2.5.1 Kupiec 二項分配檢定法

Kupiec 二項分配檢定法，以統計檢定方式來檢驗風險值估計模型的準確性。假設每日風險值與每日損益序列皆彼此獨立且將離群值 (outlier) 視為一個獨立的伯努立 (Bernoulli) 事件，當實際報酬超過所估計風險值時，視為失敗，反之視為成功。令 x 為實際報酬超過所估計風險值的次數，且此隨機變數服從二項分配，於觀察期 n 天，理論上的失敗機率為 p 的情況下，其機率質量函數可表示如下：

$$f(x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x} \text{ 。} \tag{19}$$

令實際失敗比率為 $\hat{p}=x/n$ ，虛無假設 $\mathrm{H}_0:\hat{p}=p$ ，若不拒絕 H_0 ，則表示所估計的風險值是合適的，檢定統計量為 LR_{uc} 服從 $\chi^2(1)$ 分配，表示如下：

$$LR_{uc}=-2\log[p^{x}(1-p)^{n-x}]+2\log[\hat{p}^{x}(1-\hat{p})^{n-x}] \text{ 。} \tag{20}$$

在給定的信賴水準下，若 LR_{uc} 值位於拒絕域內，則拒絕 H_0 ，表示此風險值模型不合適；反之，則不拒絕 H_0 ，表示此風險值模型合適。二項分配檢定法，又被稱為無條件涵蓋率檢定 (unconditional test)，因為它考慮到時間區間內所有的離群值，而這些離群值可能會有群聚現象發生，即離群值彼此間並不獨立，在這樣的情況下風險值模型將無法捕捉到市場真實的波動，二項分配檢定法將失去準確度。

2.5.2 Christoffersen 條件涵蓋檢定法

Christoffersen 條件涵蓋檢定法，同時考量二項分配檢定法與序列無相關兩種性質，來彌補二項分配檢定法離群值群聚的缺點。序列無相關檢定的目的在檢定序列是否是獨立的，令 I_t 為指標函數（indicator function），其定義表示如下：

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{如果} \quad r_t < -VaR_t \text{，} \\ 0 & \text{如果} \quad r_t \geq -VaR_t \text{，} \end{cases} \tag{21}$$

其中 r_t 為真實資料，VaR_t 為估計出的風險值。當真實資料超過所估計的風險值時，記為 1，反之，記為 0。序列無相關的檢定統計量 (LR_{ind}) 如下：

$$LR_{ind} = 2\log\left[\frac{(1-p_{01})^{n_{00}} p_{01}^{n_{01}} (1-p_{11})^{n_{10}} p_{11}^{n_{11}}}{(1-p)^{(n_{00}+n_{10})} (p)^{(n_{01}+n_{11})}}\right], \tag{22}$$

其中 n_{ij} 為表示前期為 i 本期為 j 之次數 ($i, j = 0,1$)，p_{01}、p_{11} 及 p 表示如下：

$$p_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}}, \ p_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}}, \ p = \frac{n_{01}+n_{11}}{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}} \text{。}$$

Christoffersen 條件涵蓋檢定法結合了二項分配檢定法與序列無相關兩種性質，定義其檢定統計量為 $LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$。$LR_{cc}$ 服從自由度 2 的卡方分配，若 LR_{cc} 值位於拒絕域內，則拒絕 H_0，表示此風險值模型不合適；反之，則不拒絕 H_0，表示此風險值模型合適。

3. 資料介紹與實證結果分析

3.1 樣本資料

本文旨在討論最適的期貨避險策略。探討極小化 Student-t 風險值與極小化 Student-t 條件風險值之避險效果，是否較極小化變

異數、極小化 Cornish-Fisher 風險值、極小化 Cornish-Fisher 條件風險值模型等研究方法，更能提供較佳之避險績效。選取英國 FTSE 100 指數、台灣加權股價指數、黃金與西德州原油為現貨部位 (long position)，以現貨對應的英國 FTSE 100 指數期貨、台灣加權股價指數期貨、黃金期貨及西德州原油期貨為避險部位 (short position)。台灣加權股價指數現貨與期貨部位，樣本時間為 1998 年 7 月 21 日到 2011 年 9 月 20 日的日資料；英國 FTSE 100 指數現貨與期貨部位，樣本時間為 1984 年 5 月 3 日到 2011 年 9 月 20 日的日資料；黃金現貨與期貨部位，樣本時間為 1978 年 10 月 30 日到 2011 年 9 月 20 日的日資料；西德州原油現貨與期貨部位，樣本時間為 2006 年 6 月 12 日到 2011 年 9 月 20 日的日資料，資料來源為 Datastream。[7]

表 1 panel A 說明樣本資料之平均數、標準差、偏態、超額峰態、Jarque-Bera 常態分配檢定結果及在信心水準 99%下，歷史模擬法求出之風險值與條件風險值。敘述性統計分析顯示全部樣本資料皆為高狹峰，[8] 除了台灣加權股價指數期貨與西德州原油現貨右偏外，其餘的樣本資料皆為左偏型態。由 Jarque-Bera 檢定顯示，樣本資料皆不符合常態分配的假設。其中，以黃金現貨偏離常態分配的程度為全部樣本中最大者。表 1 panel B 為各現貨與期貨之間的相關係數，英國 FTSE 100 指數與英國 FTSE 100 指數期貨相關係數 0.9576 為最高，黃金現貨與黃金期貨相關係數 0.5859 為最低。

3.2 樣本外資料選取方式

本文參照 Harris and Shen (2006) 和 Cao et al. (2010) 建構樣本外資料 (out-sample) 的方法。假設持有現貨並以對應之期貨部位進

---

7 Datastream 為 Thomson Financial 公司開發之線上資料庫，提供全球金融與總體經濟各項歷史資料。

8 在超額峰態方面，由於超額峰態以 0 為基準，而非一般峰態以 3 為基準，只要超額峰態係數大於 0 就是高狹峰。

行避險，利用第 1 筆至 250 筆的現貨與對應之期貨資料求算出第一個避險比率，以此避險比率與第 251 筆至 500 筆的現貨與對應之期貨資料建構出一組 250 筆的投資組合報酬資料（此為樣本外資料），然後再利用第 251 筆至 500 筆的現貨與對應之期貨資料求算出第二個避險比率，利用此避險比率與第 501 筆至 750 筆的現貨與對應之期貨資料建構出一組 250 筆的投資組合報酬（此為樣本外資料），利用第 501 筆至 750 筆的現貨與對應之期貨資料去求算出第三個避險比率，再利用此避險比率建構出一組 250 筆的投資組合報酬以此類推，直到全部的樣本外資料都建構出來為止。[9]

3.3 實證結果分析

本文將 Student-t 風險值與 Student-t 條件風險值應用於避險議題上，並與極小化變異數、極小化 Cornish-Fisher 風險值、極小化 Cornish-Fisher 條件風險值等研究方法進行比較，檢視避險績效是否有明顯改善。表 2 顯示以極小化變異數法之避險比率、標準差、偏態、超額峰態、風險值與條件風險值變化幅度。由 (3) 式求算極小化變異數法之避險比率。結果顯示，所有樣本資料的標準差於避險後皆減少，英國 FTSE 100 指數減少最多 (-73.9067%)。在偏態與峰態係數方面，兩組指數避險樣本資料皆於避險後，變得更加左偏且更加地高狹峰；黃金與西德州原油避險樣本資料於避險後，變得更加右偏且更加地高狹峰。在風險值與條件風險值部分，所有樣本資料皆於避險後減少，但減少幅度都不如標準差的減少幅度。其中，以英國 FTSE 100 指數減少幅度最大，風險值減少了 70.7395%，條件風險值減少了 69.5548%。由此可知，雖然以極小化變異法進行避險可以減少標準差，卻可能造成避險組合左偏情況加劇與高狹峰情況的產生。

---

[9] 本研究嘗試選取 125 筆、250 筆與 500 筆資料建構樣本外資料，分析的數值結果差異不大，在此以 250 筆來說明。

表 1　敘述統計表與相關係數

	平均數	標準差	偏態	超額峰態	Jarque- Bera	風險值	條件風險值
panel A 敘述統計表							
現貨							
英國 FTSE 100	0.0277	1.1138	-0.3228	9.4173	26522.54 (0.0000)	4.2086	5.7263
台灣加權股價指數	0.0103	1.5483	-0.0252	2.7221	1060.89 (0.0000)	5.4332	6.5990
黃金	0.0235	1.2319	-0.3531	14.8321	78843.28 (0.0000)	5.1933	7.2788
西德州原油	0.0145	2.6690	0.0547	5.0442	1460.52 (0.0000)	10.5900	14.2700
期貨							
英國 FTSE 100	0.0284	1.1857	-0.3901	9.8230	28903.62 (0.0000)	4.3366	5.9910
台灣加權股價指數	0.0136	1.7776	0.0177	3.4947	1748.12 (0.0000)	7.1262	8.7084
黃金	0.0231	1.2310	-0.0839	7.8888	22263.71 (0.0000)	4.9746	6.7500
西德州原油	0.0178	1.8676	-0.1037	2.7159	425.68 (0.0000)	6.9800	8.5200

panel B 相關係數

現貨	期貨	相關係數
英國 FTSE 100	英國 FTSE 100	0.9576
台灣加權股價指數	台灣加權股價指數	0.9421
黃金	黃金	0.5859
西德州原油	西德州原油	0.8124

資料來源：本研究整理。
說明：樣本資料之平均數、標準差及風險值與條件風險值之單位為百分比。
黃金現貨為 Gold Bullion LBM，黃金期貨為 CMX-GOLD 100 OZ。

表 3 顯示以極小化 Cornish-Fisher 風險值與極小化 Cornish-Fisher 條件風險值避險之平均避險比率、標準差、偏態、超額峰態、風險值與條件風險值變化幅度。由 (6) 式與 (9) 式求算極小化 Cornish-Fisher 風險值與極小化 Cornish-Fisher 條件風險值之最適避險比率。表 3 panel A 為以極小化 Cornsih-Fisher 風險值避險之結果，

表 2　極小化變異數之避險比率與績效

現貨 Long	期貨 Short	避險比率	標準差變化比率	偏態變化量	超額峰態變化量	風險值變化比率	條件風險值變化比率
英國 FTSE 100		0.8843	-73.9067%	-1.0974	13.2514	-70.7395%	-69.5548%
台灣加權股價指數		0.8257	-66.4091%	-0.4375	9.6865	-62.0626%	-50.1966%
黃金		0.5946	-19.7623%	0.0992	3.3216	-7.1813%	-1.6696%
西德州原油貨		1.1358	-42.9091%	1.4846	24.1886	-42.8179%	-28.9148%

資料來源：本研究整理。

說明：1. 偏態變化量與峰態變化量為避險後偏態（峰態）– 避險前偏態（峰態）。

2. 標準差變化比率、風險值變化比率與條件風險值變化比率皆為（避險後數據 / 未避險數據）– 1。

實證顯示樣本資料於避險後標準差皆減少，英國 FTSE 100 指數減少最多 (-72.3362%)。在偏態與峰態係數方面，兩組指數避險樣本資料皆於避險後，變得更加左偏且更加地高狹峰；黃金與西德州原油避險樣本資料於避險後，變得更加右偏且更加地高狹峰。在風險值與條件風險值部分，兩組指數避險樣本資料皆有減少，但減少幅度都不如標準差的減少幅度，以英國 FTSE 100 指數減少幅度最大，風險值減少了 54.5299%，條件風險值減少了 50.6100%。但是兩者減少程度皆不如極小化變異數法多，（在極小化變異數法下，風險值減少了 70.7395%，條件風險值減少了 69.5548%）。台灣加權股價指數風險值減少了 42.6361%，條件風險值減少了 21.4598%，但是兩者減少程度亦小於極小化變異數法，（在極小化變異數法下，風險值減少了 62.0626%，條件風險值減少了 50.1966%）這個結果說明了只看個別避險組合可發現半參數法並不一定比極小化變異數法好。表 3 panel B 說明以極小化 Cornish-Fisher 條件風險值避險之樣本外資料的實證結果。結果顯示各績效結論類似以極小化 Cornsih-Fisher 風險值法避險的實證結果。其中，英國 FTSE 100 指數於避險後之變異數、風險值與條件風險值減少幅度皆最大。有趣的是，以極小化 Cornish-Fisher 條件風險值法避險之風險值下降程度可能大於以極小化 Cornish-Fisher 風險值法避險，這個結果與 Cao et al. (2010) 一致。由實證結果顯示，極小化 Cornish-Fisher 風險值與極小化 Cornish-Fisher 條件風險值法不優於極小化變異數法。

表 4 顯示以極小化 Student-t 風險值與極小化 Student-t 條件風險值法避險之平均避險比率、標準差、偏態、超額峰態、風險值與條件風險值變化幅度。由 (17) 式與 (18) 式利用格子搜尋法求算極小化 Student-t 風險值與極小化 Student-t 條件風險值之最適避險比率。實證結果顯示與極小化變異數、極小化 Cornish-Fisher 風險值、極小化 Cornish-Fisher 條件風險值等研究方法相似，樣本資料於避險後之標準差減少且呈現高狹峰。但以極小化 Student-t 風險值

表 3　極小化 Cornish-Fisher 風險值與極小化 Cornish-Fisher 條件風險值之避險比率與績效

現貨 Long	期貨 Short	避險比率	標準差變化比率	偏態變化量	超額峰態變化量	風險值變化比率	條件風險值變化比率
panel A　極小化 Cornish-Fisher 風險值法避險							
英國 FTSE 100		0.8972	-72.3362%	-1.0229	12.6452	-54.5300%	-50.6100%
台灣加權股價指數		0.8718	-63.8613%	-0.5232	9.9939	-42.6361%	-21.4598%
黃金		0.7954	-11.6970%	0.3252	0.2112	-13.6537%	-12.8284%
西德州原油		1.1847	-34.9091%	0.5353	9.8599	-0.8520%	17.3333%
panel B　極小化 Cornish-Fisher 條件風險值法避險							
英國 FTSE 100		0.8953	-72.3171%	-1.0177	12.4945	-54.6950%	-50.8254%
台灣加權股價指數		0.8716	-63.8804%	-0.5232	9.9673	-42.7305%	-21.6120%
黃金		0.7892	-11.5525%	0.3268	0.1524	-13.7227%	-12.9352%
西德州原油		1.1860	-34.9091%	0.5413	9.9253	-0.7455%	17.4815%

資料來源：本研究整理。

註：1. 偏態變化量與峰態變化量為避險後偏態（峰態）− 避險前偏態（峰態）。

2. 標準差變化比率、風險值變化比率、條件風險值變化比率皆為（避險後數據 / 未避險數據）− 1。

表 4　極小化 Student-t 風險值與極小化 Student-t 條件風險值之避險比率與績效

現貨 Long	期貨 Short	避險比率	標準差變化比率	超額峰態變化量	風險值變化比率	條件風險值變化比率
panel A　極小化 Student-t 風險值法避險						
英國 FTSE 100		0.8759	-72.6747%	5.4032	-72.5691%	-72.2820%
台灣加權股價指數		0.8462	-66.2707%	10.0921	-65.2801%	-63.2625%
黃金		0.6275	-19.6699%	2.86260	-19.5932%	-19.3580%
西德州原油		0.9902	-41.0909%	18.0909	-40.1122%	-37.7297%
panel B　極小化 Student-t 條件風險值法避險						
英國 FTSE 100		0.8503	-72.9014%	5.4301	-72.7963%	-72.5106%
台灣加權股價指數		0.8612	-65.8944%	10.2950	-64.8884%	-62.8349%
黃金		0.6523	-19.6631%	2.7164	-19.5897%	-19.3649%
西德州原油		0.9662	-40.7273%	17.5682	-39.8317%	-37.4054%

資料來源：本研究整理。

說明：1. 峰態變化量為避險後峰態 − 避險前峰態。

2. 標準差變化比率、風險值變化比率、條件風險值變化比率皆為（避險後數據 / 未避險數據）− 1。

與極小化 Student-t 條件風險值法避險後之風險值與條件風險值變化比率有顯著改善。其中，以英國 FTSE 100 指數減少幅度最大。以極小化 Student-t 風險值避險法而言，風險值減少了 72.5691%，條件風險值減少了 72.2820%，兩者減少程度比極小化變異數法與半參數法避險多。極小化 Student-t 條件風險值與極小化 Student-t 風險值避險績效相仿，風險值與條件風險值於避險後減少幅度都比其他方法來多。由此可知，極小化 Student-t 風險值與極小化 Student-t 條件風險值避險法的表現確實優於其他研究方法。

3.4 回溯測試

本文進一步分析各模型評估市場風險的能力，以回溯測試檢測風險值模型的精確度。即檢驗測試期間實際損失超過模型估計之風險值的次數，是否反映其信心水準所預期的次數。表 5 為 99% 信賴水準下，極小化變異數法、極小化 Cornish-Fisher 風險值法、極小化 Cornish-Fisher 條件風險值法、極小化 Student-t 風險值與極小化 Student-t 條件風險值法一日風險值之回溯測試分析結果。表 5 panel A、panel B 與 panel C 結果顯示極小化變異數法、極小化 Cornish-Fisher 風險值法、極小化 Cornish-Fisher 條件風險值法無論是在 Kupiec 二項分配檢定法 (LR_{uc}) 或 Christoffersen 條件涵蓋檢定法 (LR_{cc}) 的 p 值大多小於 0.01。表示極小化變異數法、極小化 Cornish-Fisher 風險值法與極小化 Cornish-Fisher 條件風險值法的虛無假設 H_0 遭到拒絕。配合失敗率顯示，使用極小化變異數法、極小化 Cornish-Fisher 風險值法與極小化 Cornish-Fisher 條件風險值法檢測風險，可能風險預估偏誤，使得事前預警的目的失效。由表 5 panel D 與 panel E 可知顯示極小化 Student-t 風險值法與極小化 Student-t 條件風險值法在 LR_{uc} 與 LR_{cc} 統計量的 p 值都大於 0.01，表示不會拒絕虛無假設 H_0。從失敗率來看，失敗率亦很接近顯著水準 1%。說明了相較於其他風險值模型，極小化 Student-t 風險值法與極小化 Student-t 條件風險值法可以精準地估計出一日風險值。

表 5　99%信賴水準下 1 日風險值回溯測試分析結果

現貨 Long	期貨 Short	失敗率	LR_{uc}	LR_{cc}
panel A　極小化變異數法				
英國 FTSE 100		0.1451%	79.7745 (0.0000)	79.8036 (0.0000)
台灣加權股價指數		0.1884%	31.8800 (0.0000)	31.9027 (0.0000)
黃金		0.2760%	61.8691 (0.0000)	61.9964 (0.0000)
西德州原油		0.6400%	1.8903* (0.1692)	6.1751* (0.0456)
panel B　極小化 Cornish-Fisher 風險值				
英國 FTSE 100		0.0290%	120.3741 (0.0000)	120.3752 (0.0000)
台灣加權股價指數		0.0314%	55.0788 (0.0000)	55.0794 (0.0000)
黃金		0.1080%	109.2493 (0.0000)	109.2687 (0.0000)
西德州原油		0.2400%	10.5406 (0.0012)	10.5551 (0.0051)
panel C　極小化 Cornish-Fisher 條件風險值				
英國 FTSE 100		0.0290%	120.3741 (0.0000)	120.3752 (0.0000)
台灣加權股價指數		0.0314%	55.0788 (0.0000)	55.0794 (0.0000)
黃金		0.1080%	109.2493 (0.0000)	109.2687 (0.0000)
西德州原油		0.4800%	4.2474* (0.0393)	9.7367 (0.0077)
panel D　極小化 Student-t 風險值				
英國 FTSE 100		0.9428%	0.2319* (0.6301)	0.4414* (0.8020)
台灣加權股價指數		1.0675%	0.1434* (0.7049)	0.8774* (0.6449)
黃金		1.2242%	3.9483* (0.0469)	5.7660* (0.0560)
西德州原油		1.0400%	0.0184* (0.8922)	2.4117* (0.2994)

表 5　99%信賴水準下 1 日風險值回溯測試分析結果（續前頁）

現貨 Long	期貨 Short	失敗率	LR_{uc}	LR_{cc}
panel E　極小化 Student-t 條件風險值				
英國 FTSE 100		0.9574%	0.1285* (0.7200)	0.3144* (0.8545)
台灣加權股價指數		1.0989%	0.3049* (0.5808)	1.0829* (0.5819)
黃金		1.2482%	4.8060* (0.0284)	6.4850* (0.0391)
西德州原油		1.0400%	0.0184* (0.8922)	2.4117* (0.2994)

資料來源：本研究整理。
註：1.(　)為檢定統計量的 p 值。
2. LR_{uc} 為 Kupiec 二項分配檢定法的檢定統計量。LR_{cc} 為 Christoffersen 條件涵蓋檢定法的檢定統計量。
3. *表示變數達 1% 的顯著水準，H_0 不被拒絕。

此外，本文另檢視五日及十日風險值之回溯測試。表 6 為 99% 信賴水準下，極小化變異數法、極小化 Cornish-Fisher 風險值法、極小化 Cornish-Fisher 條件風險值法、極小化 Student-t 風險值與極小化 Student-t 條件風險值法五日風險值及十日風險值的回溯測試分析結果。由表 6 可知，極小化 Student-t 風險值法與極小化 Student-t 條件風險值法所評估之五日風險值及十日風險值都比其他風險值模型更接近失敗率，說明了極小化 Student-t 風險值法與極小化 Student-t 條件風險值法對於衡量多日風險值仍然有較佳的表現。

4. 結論與建議

金融資產報酬存在厚尾特性，倘若利用常態分配去配適資料可能產生偏誤，本文延伸 Harris and Shen (2006) 與 Cao et al. (2010) 模型探討不同風險測量模型之避險效果。以英國 FTSE 100、台灣加權股價指數、黃金與西德州原油為現貨及其對應期貨為避險工

表 6　99%信賴水準下 5 日風險值及 10 日風險值回溯測試分析結果

現貨 Long	期貨 Short	失敗率（5 日）	失敗率（10 日）
panel A　極小化變異數法			
英國 FTSE 100		0.0726%	0.1017%
台灣加權股價指數		0.0629%	0.0000%
黃金現貨		0.1570%	0.1571%
西德州原油		0.7188%	0.4792%
panel B　極小化 Cornish-Fisher 風險值			
英國 FTSE 100		0.0145%	0.0145%
台灣加權股價指數		0.0000%	0.0000%
黃金現貨		0.0000%	0.0000%
西德州原油		0.3195%	0.0000%
panel C　極小化 Cornish-Fisher 條件風險值			
英國 FTSE 100		0.0145%	0.0145%
台灣加權股價指數		0.0000%	0.0000%
黃金現貨		0.0242%	0.0000%
西德州原油		0.3195%	0.0000%
panel D　極小化 Student-t 風險值			
英國 FTSE 100		0.5515%	0.1888%
台灣加權股價指數		0.3772%	0.0315%
黃金現貨		0.3745%	0.2297%
西德州原油		1.2780%	1.0383%
panel E　極小化 Student-t 條件風險值			
英國 FTSE 100		0.4644%	0.2614%
台灣加權股價指數		0.3772%	0.0315%
黃金現貨		0.3745%	0.2176%
西德州原油		1.2780%	1.0383%

資料來源：本研究整理。

具，分析極小化 Student-t 風險值、極小化 Student-t 條件風險值、極小化 Cornish-Fisher 風險值、極小化 Cornish-Fisher 條件風險值與極小化變異數等方法在避險組合之標準差、偏態、峰態、風險值及條件風險值的變化程度。實證結果顯示以極小化變異數法、極小化 Cornish-Fisher 風險值法與極小化 Cornish-Fisher 條件風險值法所求出最適避險比率之避險組合的標準差、風險值、條件風險值皆減少，但風險值與條件風險值減少程度不如標準差大。各方法皆可能造成避險組合之分配變得更左偏與高狹峰，此結果與 Harris and Shen (2006) 與 Cao et al. (2010) 指出峰態增加的現象有助解釋避險基金報酬於市場中傾向高狹峰 (highly leptokurtic) 的現象。Agarwal and Naik (2004) 分析避險基金，也發現避險後會導致樣本資料更加地左偏與高狹峰的結果。本文顯示極小化 Student-t 風險值、極小化 Student-t 條件風險值法也會使避險組合分配產生高狹峰現象，但在風險值與條件風險值減少程度上優於其他研究方法。

1996 年巴賽爾資本協定准許受管轄的金融機構採用自行發展的內部風險模型來計算風險性資本準備，以提撥足夠的資本來預防市場風險，但這些風險模型必須符合回溯測試。本文利用回溯測試檢視模型評估市場風險的能力，實證結果顯示極小化變異數法、極小化 Cornish-Fisher 風險值法與極小化 Cornish-Fisher 條件風險值法無法通過檢驗，可能無法準確預估風險，喪失使用風險值做為事前預防風險的目的。極小化 Student-t 風險與極小化 Student-t 條件風險值法皆能通過檢驗且失敗率可以反映顯著水準，代表極小化 Student-t 風險值法與極小化 Student-t 條件風險值法不但在避險績效上優於其他方法並且能精準地預測風險值。

附錄 1

Cornish and Fisher (1937) 提出 Cornish-Fisher 展開式，利用隨機變數的動差資訊與常態分配分位數 $c(\alpha)$ 推導出近似隨機變數分配之分位數的關係式。隨機變數分配之分位數可視為常態分配分位數再加上調整項。由於實證分析顯示資產分配具有非 0 的偏態係數與異於 3 的峰態係數，倘若僅以常態分配分位數 $c(\alpha)$ 評估資產風險值將會產生偏誤。

假設考慮至第三及第四階動差（偏態 s_p 與峰態 k_p ），忽略更高階動差資訊且省略不顯著值等項目，非常態分配之分位數表示如下：

$$\begin{aligned}\tilde{q}_p(\alpha;s_p,k_p) &= c(\alpha)+\frac{1}{6}[c(\alpha)^2-1]s_p \\ &+\frac{1}{24}[c(\alpha)^3-3c(\alpha)](k_p-3) \\ &-\frac{1}{36}[2c(\alpha)^3-5c(\alpha)]s_p^2\text{。}\end{aligned} \tag{A1}$$

將具有描述非常態分配之分位數取代常態分配之分位數，考慮投資組合偏態與峰態之風險值如下：

$$CF_{VaR_p}(1-\alpha)=-\sigma_p\tilde{q}_p(\alpha;s_p,k_p)\text{ 。} \tag{A2}$$

令 (A2) 式對 h 一階偏微後等於零，可求得極小化 Cornish-Fisher 風險值架構下之最適避險比率。一階條件推導說明如下：

$$\frac{\partial CF_{VaR_p}(1-\alpha)}{\partial h}=0\text{ ，} \tag{A3}$$

即

$$\frac{\partial\sigma_p\tilde{q}_p(\alpha;s_p,k_p)}{\partial h}=\tilde{q}_p(\alpha;s_p,k_p)\frac{\partial\sigma_p}{\partial h}+\sigma_p\frac{\partial\tilde{q}_p(\alpha;s_p,k_p)}{\partial h}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ c(\alpha) + \tfrac{1}{6}[c(\alpha)^2 - 1]s_p \right\} \frac{\partial \sigma_p}{\partial h} \\
&+ \left\{ \tfrac{1}{24}[c(\alpha)^3 - 3c(\alpha)](k_p - 3) \right\} \frac{\partial \sigma_p}{\partial h} \\
&- \left\{ \tfrac{1}{36}[2c(\alpha)^3 - 5c(\alpha)]s_p^2 \right\} \frac{\partial \sigma_p}{\partial h} \\
&+ \sigma_p \frac{\partial \left\{ c(\alpha) + \frac{1}{6}[c(\alpha)^2 - 1]s_p + \frac{1}{24}[c(\alpha)^3 - 3c(\alpha)](k_p - 3) \right\}}{\partial h} \\
&- \sigma_p \frac{\partial \left\{ \frac{1}{36}[2c(\alpha)^3 - 5c(\alpha)]s_p^2 \right\}}{\partial h} \qquad \text{(A4)} \\
&= \left\{ c(\alpha) - \tfrac{1}{8}[c(\alpha)^3 - 3c(\alpha)] \right\} \frac{\partial \sigma_p}{\partial h} \\
&+ \left\{ \tfrac{1}{6}[c(\alpha)^2 - 1]s_p \right\} \frac{\partial \sigma_p}{\partial h} \\
&+ \left\{ \tfrac{1}{24}[c(\alpha)^3 - 3c(\alpha)](k_p) \right\} \frac{\partial \sigma_p}{\partial h} \\
&- \left\{ \tfrac{1}{36}[2c(\alpha)^3 - 5c(\alpha) s_p^2 \right\} \frac{\partial \sigma_p}{\partial h} \\
&+ \sigma_p \left\{ \tfrac{1}{6}[c(\alpha)^2 - 1] \frac{\partial s_p}{\partial h} \right\} \\
&+ \sigma_p \left\{ \tfrac{1}{24}[c(\alpha)^3 - 3c(\alpha)] \frac{\partial k_p}{\partial h} \right\} \\
&- \sigma_p \left\{ \tfrac{1}{36}[2c(\alpha)^3 - 5c(\alpha) \frac{\partial s_p^2}{\partial h} \right\} 。 \qquad \text{(A5)}
\end{aligned}
$$

所以一階條件可表示如下：

$$\left(A_1 + A_2 s_p + A_3 k_p + A_4 s_p^2\right)\frac{\partial \sigma_p}{\partial h}$$
$$+\sigma_p\left(A_2\frac{\partial s_p}{\partial h} + A_3\frac{\partial k_p}{\partial h} + 2A_4 s_p\frac{\partial s_p}{\partial h}\right) = 0 \text{，} \quad \text{(A6)}$$

其中

$A_1 = c(\alpha) - \frac{1}{8}[c(\alpha)^3 - 3c(\alpha)]$，$A_2 = \frac{1}{6}[c(\alpha)^2 - 1]$ ，

$A_3 = \frac{1}{24}[c(\alpha)^3 - 3c(\alpha)]$，$A_4 = -\frac{1}{36}[2c(\alpha)^3 - 5c(\alpha)]$ 。

附錄 2

利用 Cornish-Fisher 展開式求算資產分配之分位數，將具有描述非常態分配之分位數 (A1) 式取代常態分配之分位數，考慮投資組合偏態與峰態特性之條件風險值表示如下：

$$CF_{CVaR_p}(1-\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1}CF_{VaR}(x)\,dx$$

$$=-\frac{\sigma_p}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1}\tilde{q}_p\,dx \tag{A7}$$

$$=-\sigma_p\left[M_1+\frac{1}{6}(M_2-1)s_p\right]$$

$$-\sigma_p\left[\frac{1}{24}(M_3-3M_1)(k_p-3)\right]$$

$$+\sigma_p\left[\frac{1}{36}(2M_3-5M_1)s_p^2\right], \tag{A8}$$

其中 σ_p 為避險投資組合報酬的標準差，$(1-\alpha)$ 為信心水準，$M_i=\int_{-\infty}^{c(\alpha)}x^i f(x)dx/\alpha$，$f(x)$ 為標準常態分配的機率密度函數。

令 (A8) 式對 h 一階偏微後等於零，可求得極小化 Cornish-Fisher 條件風險值架構下之最適避險比率。此時，一階條件推導說明如下：

$$\frac{\partial CF_{CV_aR_p}{}^{(1-\alpha)}}{\partial h}=0\ , \tag{A9}$$

即

$$\frac{\partial CF_{CV_aR_p}{}^{(1-\alpha)}}{\partial h}=\left[M_1+\frac{1}{6}(M_2-1)s_p+\frac{1}{24}(M_3-3M_1)(k_p-3)\right]\frac{\partial\sigma_p}{\partial h}$$

$$-\left[\frac{1}{36}(2M_3-5M_1)s_p^2\right]\frac{\partial\sigma_p}{\partial h}$$

$$+\sigma_p \frac{\partial\left[M_1+\frac{1}{6}(M_2-1)s_p+\frac{1}{24}(M_3-3M_1)(k_p-3)-\frac{1}{36}(2M_3-5M_1)s_p^2\right]}{\partial h}$$

$$=\left[M_1-\frac{1}{8}(M_3-3M_1)\right]\frac{\partial\sigma_p}{\partial h}+\left[\frac{1}{6}(M_2-1)s_p\right]\frac{\partial\sigma_p}{\partial h}$$

$$+\left[\frac{1}{24}(M_3-3M_1)(k_p)\right]\frac{\partial\sigma_p}{\partial h}$$

$$-\left[\frac{1}{36}(2M_3-5M_1)s_p^2\right]\frac{\partial\sigma_p}{\partial h}+\sigma_p\left[\frac{1}{6}(M_2-1)\frac{\partial s_p}{\partial h}\right]$$

$$+\sigma_p\left[\frac{1}{24}(M_3-3M_1)\frac{\partial k_p}{\partial h}\right]$$

$$-\sigma_p\left[\frac{1}{36}(2M_3-5M_1)\frac{\partial s_p^2}{\partial h}\right]。 \tag{A10}$$

所以一階條件可表示如下：

$$\left(B_1+B_2s_p+B_3k_p+B_4s_p^2\right)\frac{\partial\sigma_p}{\partial h}$$

$$+\sigma_p\left(B_2\frac{\partial s_p}{\partial h}+B_3\frac{\partial k_p}{\partial h}+2B_4s_p\frac{\partial s_p}{\partial h}\right)=0， \tag{A11}$$

其中

$$B_1=M_1-\frac{1}{8}[M_3-3M_1]，B_2=\frac{1}{6}[M_2-1]，$$

$$B_3=\frac{1}{24}[M_3-3M_1]，B_4=-\frac{1}{36}[2M_3-5M_1]。$$

參考文獻

Agarwal, V. and N. Y. Naik (2004), “Risks and Portfolio Decisions Involving Hedge Funds,” *The Review of Financial Studies*, 17:1, 63-98.

Alexander, C. O. and C. T. Leigh (1997), “On the Covariance Matrices Used in Value at Risk Models,” *The Journal of Derivatives*, 4:3, 50-62.

Alexander, G. J. and A. M. Baptista (2004), “A Comparison of VaR and CVaR Constraints on Portfolio Selection with the Mean-Variance Model,” *Management Science*, 50:9, 1261-1273.

Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber and D. Heath (1999), “Coherent Measures of Risk,” *Mathematical Finance*, 9:3, 203-228.

Blattberg, R. C. and N. J. Gonedes (1974), “A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices,” *The Journal of Business*, 47:2, 244-280.

Broda, S. A. (2012), “The Expected Shortfall of Quadratic Portfolios with Heavy-Tailed Risk Factors,” *Mathematical Finance*, 22:4, 710-728.

Campbell, R., R. Huisman and K. Koedijk (2001), “Optimal Portfolio Selection in a Value-at-Risk Framework,” *Journal of Banking & Finance*, 25:9, 1789-1804.

Cao, Z., R. D. F. Harris and J. Shen (2010), “Hedging and Value at Risk: A Semi-Parametric Approach,” *The Journal of Futures Markets*, 30:8, 780-794.

Christoffersen, P. F. (1998), “Evaluating Interval Forecasts,” *International Economic Review*, 39:4, 841-862.

Cornish, E. A. and R. A. Fisher (1937), “Moments and Cumulants in the Specification of Distributions,” *Revue de l'Institut International de Statistique*, 5, 307-320.

Cotter, J. and J. Hanly (2006), “Reevaluating Hedging Performance,” *The Journal of Futures Markets*, 26:7, 677-702.

Daníelsson, J. and C. G. de Vries (1997), “Tail Index and Quantile Estimation with Very High Frequency Data,” *Journal of Empirical Finance*, 4:2-3, 241-257.

Datastream (1978-2011), http://ers.lib.ncnu.edu.tw/cgi-bin/er/swlink.cgi.

Ederington, L. H. and J. M. Salas (2008), “Minimum Variance Hedging When Spot Price Changes Are Partially Predictable,” *Journal of Banking & Finance*, 32:5, 654-663.

García-Donato, G., P. Gento and J. Ortega (2001), “Normal versus Student in Measuring Value at Risk: An Empirical Bayesian Overview,” University of Castilla-La Mancha Working Paper No. 271.

Glasserman, P., P. Heidelberger and P. Shahabuddin (2002), “Portfolio Value-at-Risk with Heavy-Tailed Risk Factors,” *Mathematical Finance*, 12:3, 239-269.

Harris, R. D. F. and J. Shen (2006), “Hedging and Value at Risk,” *The Journal of Futures Markets*, 26:4, 369-390.

Huisman, R., K. G. Koedijk and R. A. J. Pownall (1998), “VaR-x: Fat Tails in Financial Risk Management,” *Journal of Risk*, 1:1, 47-61.

Jorion, P. (1996), “Risk^2: Measuring the Risk in Value at Risk,” *Financial Analysts Journal*, 52:6, 47-56.

Kearns, P. and A. Pagan (1997), “Estimating the Density Tail Index for Financial Time Series,” *The Review of Economics and Statistics*, 79:2, 171-175.

Kupiec, P. H. (1995), “Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models,” *The Journal of Derivatives*, 3:2, 73-84.

Leibowitz, M. L. and R. D. Henriksson (1989), “Portfolio Optimization with Shortfall Constrains: A Confidence-Limit Approach to Managing Downside Risk,” *Financial Analysts Journal*, 45:2, 34-41.

Lo, A. W. and A. C. MacKinlay (1988), "Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test," *The Review of Financial Studies*, 1:1, 41-66.

McNeil, A. J. and R. Frey (2000), "Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach," *Journal of Empirical Finance*, 7:3-4, 271-300.

Praetz, P. D. (1972), "The Distribution of Share Price Changes," *The Journal of Business*, 45:1, 49-55.

Richardson, M. and T. Smith (1993), "A Test for Multivariate Normality in Stock Returns," *The Journal of Business*, 66:2, 295-321.

Roy, A. D. (1952), "Safety First and the Holding of Assets," *Econometrica*, 20:3, 431-449.

Simonato, J. G. (2011), "The Performance of Johnson Distributions for Computing Value at Risk and Expected Shortfall," *The Journal of Derivatives*, 19:1, 7-24.

Tasche, D. (2002), "Expected Shortfall and Beyond," *Journal of Banking & Finance*, 26:7, 1519-1533.

Zangari, P. (1996), "A VaR Methodology for Portfolios that Include Options," *Risk Metrics Monitor*, 1, 4-12.

Zhou, G. (1993), "Asset-Pricing Tests under Alternative Distributions," *The Journal of Finance*, 48:5, 1927-1942.

Hedging and Value at Risk with a Heavy Tailed Distribution

Chu, Hsiang-Hui, Jung-Hsien Chang and Yu-Sen Lin

Abstract

This paper evaluates the non-normality effect of financial asset returns on the optimal hedge ratio. We adopt a new method of estimating the minimum value at risk and the minimum conditional value at risk hedge ratios based on the student-t distribution. Using spot and futures returns for the FTSE 100, Taiwan Weighted Stock Indices, Gold, and WTI Crude Oil, we examine whether the new approach works better than the minimum-variance hedging, minimum value at risk, and minimum conditional value at risk approaches based on the Cornish-Fisher expansion. Among the various models, the empirical results show that the minimum student-t value at risk and the minimum student-t conditional value at risk techniques present more efficient results. Moreover, through backtesting, the empirical results offer evidence that the new approaches accurately evaluate the market risk of hedging portfolios.

Keywords: Minimum-Variance Model, Student-t Value at Risk, Hedge Ratio, Backtesting
JEL Classification: C10, G11, G32

Chu, Hsiang-Hui, Department of Banking and Finance, National Chi Nan University, No. 1, University Rd., Puli Township, Nantou County 54561, Taiwan, R.O.C., Tel: 886-4-92910960 ext. 4622, E-mail: hhchu@ncnu.edu.tw. Jung-Hsien Chang, Department of Banking and Finance, National Chi Nan University, No. 1, University Rd., Puli Township, Nantou County 54561, Taiwan, R.O.C., Tel: 886-4-92910960 ext. 4693, E-mail: jschang@ncnu.edu.tw. Yu-Sen Lin, Department of Banking and Finance, National Chi Nan University, No. 1, University Rd., Puli Township, Nantou County 54561, Taiwan, R.O.C., Tel: 886-4-92910960, E-mail: s98214519@mail1.ncnu.edu.tw.
Received 6 March 2012; revised 16 April 2013; accepted 7 January 2014.