隱含處份效果之價值函數

郭志安、陳銘凱*

摘　要

處份效果係指人們在從事證券交易時，傾向於實現獲利的股票卻又不願處份損失的部位。由於 Tversky and Kahneman (1992) 所提出的價值函數無法解釋處份效果，因此，本文在展望理論的基本精神之下，建構出一個 tanh (x) 型態的價值函數，除了可以解釋處份效果，也解決了財富變動量趨近於零時風險偏好不合理的現象。

關鍵詞：展望理論、價值函數、處份效果
JEL 分類代號：D03, D81, G02

* 兩位作者分別為聯絡作者：郭志安，國立彰化師範大學財務金融技術學系副教授，50074 彰化市師大路 2 號，電話：04-7232105 轉 7344，E-mail: zionguo@cc.ncue.edu.tw。陳銘凱，台中市立向上國民中學數學科教師，40359 臺中市西區美村路一段 389 號，電話：04-23726085 轉 710，E-mail: tajk@nmail.hsjh.tc.edu.tw。作者非常感謝匿名評審之指正與寶貴意見，使本文趨臻完善。
投稿日期：民國 101 年 3 月 18 日；修訂日期：民國 101 年 5 月 15 日；接受日期：民國 102 年 9 月 16 日。

經濟研究 (Taipei Economic Inquiry), 50:1 (2014), 49-67。
臺北大學經濟學系出版

1. 導論

傳統經濟學研究奠基於自利 (self-interest) 的動機和理性 (rational) 的決策假設，主張人的自利本性是一切經濟行為的出發點。理性主義向來是經濟學家們的信條，「經濟人」的各種假設都是以理性為出發點，von Neumann and Morgenstern (1944) 所提出的期望效用理論是目前最被廣為接受的規範性風險決策理論。然而，人們在做決策時並不會像期望效用理論所假設的那麼理性，反而常常與期望效用理論所假設的理性行為相互抵觸，例如阿萊悖論 (Allais paradox)、同比例效果 (common ratio effect)、確定效果 (certainty effect)、反射效果 (reflection effect)、分離效果 (isolation effect)、機率保險 (probabilistic insurance)、偏好逆轉 (preference reversal)、埃爾斯伯格悖論 (Ellsberg paradox)、賭博等現象皆與期望效用理論相互抵觸。[1]

由於期望效用理論無法解釋為什麼人們在某些情況下是風險趨避者，在某些情況之下卻又變成了風險愛好者。因此 Friedman and Savage (1948) 提出了 S 形效用函數，主張效用函數應該是由二個凹函數和一個凸函數所組成。這二個凹函數分別代表了二個不同的

---

[1] Allais (1953) 提出阿萊悖論，指出人們的行為違反了期望效用理論的獨立性公理；Kahneman and Tversky (1979) 提出同比例效果與確定效果，也指出人們的行為模式違反了期望效用理論的獨立性公理；Kahneman and Tversky (1979) 提出反射效果，發現個人對利得和損失的偏好剛好相反；Kahneman and Tversky (1979) 提出分離效果，指出人們會因為問題描述方式不同而有不同的選擇；Kahneman and Tversky (1979) 指出機率保險的效用大於一般性的保險，但是人們卻傾向於購買一般性的保險，這顯然違了背期望效用理論；Lichtenstein and Slovic (1971)、Reilly (1982) 提出偏好逆轉，指出人們對於相同一組出象的偏好會因為立場不同而有所改變；Ellsberg (1961) 提出埃爾斯伯格悖論，指出人們對於不確定性的出象有趨避的傾向；賭博是屬於風險愛好的一種行為，期望效用理論顯然無法加以解釋，根據 Friedman and Savage (1948) 的說法，賭博的行為可能是為了擠身高社會經濟階層的一種手段，Markowitz (1952) 則認為賭博可能是為了獲得參與的樂趣。

社會經濟階層 (socioeconomic level)，中間的那個凸函數則為這二個社會經濟階層的過渡階段。雖然個人的效用會隨著所得的增加而增加，但是遞減的邊際效用卻讓低社會經濟階層的人士永遠無法擠身到高社會經濟階層，唯有透過遞增的邊際效用（中間的那個凸函數），低社會經濟階層的人士才有可能擠身到高社會經濟階層。Markowitz (1952) 提出具有三個反曲點 (inflection points) 的效用函數，主張效用應該要建立在財富的變動之上（利得或損失）而非奠基於最終的財富水準之上。Markowitz (1952) 認為中間的反曲點代表目前的財富水準，效用函數高於中間反曲點的部分為凸函數，過了最高反曲點之後就變成凹函數；效用函數低於中間反曲點的部分為凹函數，過了最低反曲點之後就變成凸函數。此外，人們經常會依靠經驗或直覺做決策，也常常會因為問題描述的方式不同而有不同的選擇，這些與期望效用理論所假設的理性行為相互抵觸的現象，幾乎都可以在 Kahneman and Tversky (1979) 所提出的展望理論 (prospect theory) 中獲得合理的解答。

Shefrin and Statman (1985) 提出了處份效果 (disposition effect)，主張投資人傾向於繼續持有賠錢的股票，而賣出賺錢的股票。Odean (1998)、Weber and Camerer (1998)、Grinblatt and Keloharju (2001) 等人的研究結果支持個別投資人的交易行為具有處份效果，Grinblatt and Keloharju (2001) 與 Shapira and Venezia (2001) 發現機構投資人的交易行為具有處份效果，Heisler (1994)、Frino et al. (2004) 與 Locke and Mann (2005) 則發現期貨交易者也傾向於實現具有資本利得的資產而繼續持有資本損失的資產。實證研究結果顯示投資人在進行證券交易時的確存在處份效果，Barberis and Xiong (2009) 指出 Tversky and Kahneman (1992) 的價值函數無法解釋處份效果，Kaustia (2010) 與 Hens and Vlcek (2011) 也認為 Tversky and Kahneman (1992) 的價值函數與處份效果並不一致。根據處份效果，投資人有賣盈保虧的心態，傾向於太早實現獲利的股票，卻又不願處份損失的部位，也就是說，投資人在面對利得時會減少手

中所持有的風險性資產，風險趨避程度隨之升高。然而在 Tversky and Kahneman (1992) 的模型中，隨著獲利的增加，投資人的風險趨避程度反而會降低，而且當財富變動量趨近於零時，投資人若非極度風險趨避者就是極度風險愛好者，這種極端的現象也與經濟社會的狀況不相符。有鑑於此，本文在展望理論的基本精神之下，利用物理學中的懸鏈線概念，建構出隱含處份效果而且具備二階連續可微分的價值函數。本文所建構的 $\tanh(x)$ 型態價值函數除了可以解釋處份效果之外，當投資人的財富變動量趨近於零時，也不會出現風險偏好不合理的現象。

本文研究架構除第 1 節為導論之外，第 2 節敘述相關價值函數，第 3 節建構隱含處份效果的二階連續可微分價值函數，第 4 節結論。

2. 相關價值函數

展望理論不再以期末的總財富做為衡量效用的依據，而是改以財富的變動量（定義在相對於某個參考點的利得或損失）做為衡量的依據，然而，目前學術上所發展出來的價值函數大多是以傳統的雙曲型絕對風險規避 (hyperbolic absolute risk aversion, HARA) 效用函數為基礎，將利得部分與損失部分分開討論，利得部分的價值函數直接引用期望效用理論中常用的 HARA 效用函數，損失部分的價值函數則是將財富變動量取絕對值之後，直接將利得部分所引用的效用函數乘上負的損失趨避係數 (loss aversion coefficient)。學術上最常見的 HARA 效用函數有冪次效用函數 (power utility function)、二次式效用函數 (quadratic utility function)、指數型效用函數 (exponential utility function) 等三類，本文將逐一檢視經由這三類效用函數所建構出來的價值函數是否支持處份效果？當財富變動量趨近於零時這三類 HARA 型態的價值函數之風險偏好是否合理？

Tversky and Kahneman (1992) 所提出的價值函數即為冪次效用函數，其價值函數定義如下：

$$V(\Delta W_t)=\begin{cases}(\Delta W_t)^{\beta} \text{ 當 } \Delta W_t \geq 0, \\ -\lambda(-\Delta W_t)^{\beta} \text{ 當 } \Delta W_t < 0,\end{cases} \tag{1}$$

其中 λ 為損失趨避係數，$\lambda>1$；β 為風險趨避係數，$0<\beta<1$；ΔW_t 為財富變動量。若 $u(x)$ 表示效用函數，Pratt (1964) 定義絕對風險趨避係數 (absolute risk aversion, ARA) 為 $-u''(x)/u'(x)$，其中 $u'(x)$ 與 $u''(x)$ 分別為 $u(x)$ 的一次微分與二次微分函數。令 ARA_{TK} 表示 Tversky and Kahneman (1992) 的模型所隱含的絕對風險趨避係數，由 (1) 式可知 $ARA_{TK}=(1-\beta)/\Delta W_t$，$\lim_{\Delta W_t\to 0^+} ARA_{TK}=\infty$，$\lim_{\Delta W_t\to 0^-} ARA_{TK}=-\infty$，$\partial ARA_{TK}/\partial(\Delta W_t)<0$。也就是說，根據 Tversky and Kahneman (1992) 的模型，當財富變動量趨近於零時，投資人若非極度趨避風險就是極度愛好風險，這個現象並不合理。此外，隨著財富變動量的增加，投資人的風險趨避程度會逐漸降低，進而持有更多的風險性資產，這種現象與處份效果並不一致。

接下來，我們檢視二次式效用函數的特性，假設二次式效用函數如下所示：

$$u(\Delta W_t)=a(\Delta W_t)-\frac{b}{2}(\Delta W_t)^2, \tag{2}$$

其中 a 與 b 為常數，$a>0$，$b>0$；ΔW_t 為財富變動量。令 ARA_Q 表示二次式效用函數的絕對風險趨避係數，由(2)式可知 $\partial ARA_Q/\partial(\Delta W_t)>0$，乍看之下，二次式效用函數可以用來解釋處份效果（隨著財富變動量的增加，投資人的風險趨避程度也會逐漸升高），然而，二次式效用函數有個限制，那就是 $\Delta W_t \leq a/b$，若要滿足 $\Delta W_t \in(-\infty,\infty)$，就表示 b 會趨近於 0。當 b 趨近於 0 時，二次式效用函數將退化成線性的效用函數，Barberis et al. (2001) 所提出的

價值函數即為線性方程式。Barberis et al. (2001) 以現在的股價 (S_t) 是否高於投資人心目中的股價 (Z_t) 為區隔，分別建構價值函數，為了和其他的價值函數進行比較，我們重新定義符號，將 Barberis et al. (2001) 的價值函數改寫如下：

處於獲利階段時 $(z_t = Z_t / S_t < 1$，$\Delta W_t^G = S_t R_{t+1} - Z_t R_{f,t})$：

$$BHS(\Delta W_t^G) = \begin{cases} \Delta W_t^G - (S_t - Z_t) R_{f,t} & \text{當} \ \Delta W_t^G \geq 0, \\ -(S_t - Z_t) R_{f,t} + \lambda(\Delta W_t^G) & \text{當} \ \Delta W_t^G < 0, \end{cases} \tag{2-1}$$

其中 λ 為損失趨避係數，$\lambda>1$；R_{t+1} 為風險性資產的預期報酬率；$R_{f,t}$ 為無風險利率；ΔW_t^G 表示處於獲利階段時的預期獲利或損失。

處於損失階段時 $(z_t = Z_t / S_t < 1$，$\Delta W_t^G = S_t R_{t+1} - Z_t R_{f,t})$：

$$BHS(\Delta W_t^L) = \begin{cases} \Delta W_t^L & \text{當} \ \Delta W_t^L \geq 0, \\ \lambda(z_t)\Delta W_t^L & \text{當} \ \Delta W_t^L < 0, \end{cases} \tag{2-2}$$

其中 $\lambda(z_t) = \lambda + k(z_t - 1)$，$\lambda$ 為損失趨避係數，$\lambda > 1$；k 為常數，$k > 0$；R_{t+1} 為風險性資產的預期報酬率；$R_{f,t}$ 為無風險利率；ΔW_t^L 表示處於損失階段時的預期獲利或損失。由於 Barberis et al. (2001) 的價值函數之絕對風險趨避係數恆為零，故無法支持處份效果。

最後，我們檢視指數型態的效用函數。Hung and Wang (2005) 所提出的價值函數即為指數型價值函數，為了和其他的價值函數進行比較，我們重新定義符號，將 Hung and Wang (2005) 所提出的指數型價值函數改寫如下：

$$HW(\Delta W_t) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta(\Delta W_t)} & \text{當} \ \Delta W_t^L \geq 0, \\ -\lambda(1 - e^{\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}) & \text{當} \ \Delta W_t < 0, \end{cases} \tag{3}$$

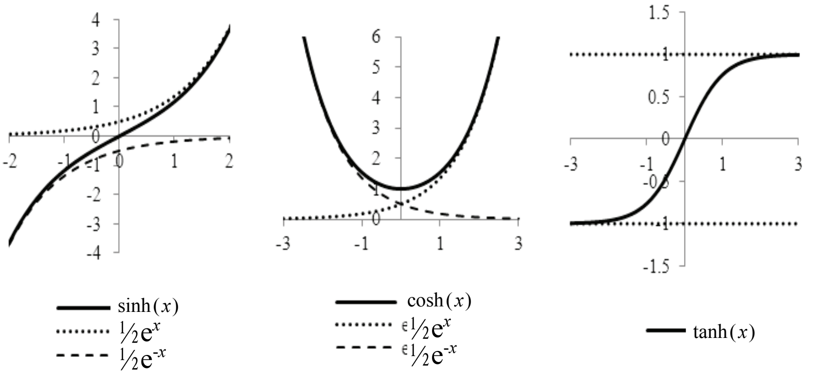
其中 λ 為損失趨避係數，$\lambda > 1$；β 為風險趨避係數，$\beta > 0$；$\Delta W_t = c_t - v_t$；c_t 為第 t 期的消費水準；v_t 為第 t 期的基本消費水準。令 ARA_{HW} 表示 Hung and Wang (2005) 模型的絕對風險趨避係數，由 (3) 式可知 $\partial ARA_{HW} / \partial(\Delta W_t) = 0$，也就是說，無論財富變動量增加或減少，投資人的風險趨避程度都不會改變，所以 Hung and Wang (2005) 的模型也無法解釋處份效果。此外 $\lim_{\Delta W_t \to 0^+} ARA_{HW} = \beta$ 而 $\lim_{\Delta W_t \to 0^-} ARA_{HW} = -\beta / \lambda$，由於 $\lim_{\Delta W_t \to 0^+} ARA_{HW} \neq \lim_{\Delta W_t \to 0^-} ARA_{HW}$，當財富變動量趨近於零時，投資人的風險偏好也會出現不合理的現象。

3. 隱含處份效果之價值函數

由於 HARA 型態的價值函數難以解釋處份效果，因此，本文導入物理學中的懸鏈線概念，據以建構出隱含處份效果的價值函數。為了避免財富變動量趨近於零時，投資人的風險偏好會出現不合理的現象，故本文所建構的價值函數必須具備二階連續可微分的特性。

無論是懸垂的項鍊、吊橋上方的懸垂鋼索或是兩根電線桿之間所架設的電線都會形成一條曲線。當我們固定項鍊的兩端，在重力作用之下項鍊會自然下垂，此時，項鍊所形成的曲線方程式就是著名的「懸鏈線問題」(the hanging chain problem)。最速下降曲線就是指在重力作用之下，一條兩端垂掛的鐵鍊所形成的曲線方程式，為了求出最速下降曲線，Bernoulli (1696) 假設滾珠會如同光線一般找尋花費時間最少的路徑，若有 A、B 兩點，B 點的高度較 A 點低而且不位於 A 點的正下方，若 A、B 之間有一曲線軌道，在不考慮摩擦力的情況之下，當一顆彈珠沿著軌道由 A 點降到 B 點時，下降所需時間最短的那條曲線就是最速下降曲線。有了最速下降曲線的觀念之後，懸鏈線引入了 $\sinh(x)$ 與 $\cosh(x)$，進而發展出不同型態

的雙曲線。展望理論的價值函數為 S 形，在面對利得時是凹函數，在面對損失則為凸函數，雖然 $\sinh(x)$ 與 $\cosh(x)$ 都無法符合這個特性，但是將二者相除之後可得 $\sinh(x)/\cosh(x)=\tanh(x)$ ， $\tanh(x)$ 即為 S 形函數。茲將 $\sinh(x)$ 、 $\cosh(x)$ 與 $\tanh(x)$ 的圖形繪製如下：



$$\sinh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

資料來源：本研究整理。

圖 1　$\sinh(x)$ 、 $\cosh(x)$ 與 $\tanh(x)$

Hershbarger (1975) 率先將 $\tanh(x)$ 函數應用在保險上，利用 $\tanh(x)$ 函數的大於零的部分建構出心理容量曲線 (psychometric capacity curve)。Hershbarger (1975) 的心理容量曲線如下所示：

$$f(x)=\tanh(c(x-x_0))=\frac{e^{c(x-x_0)}-e^{-c(x-x_0)}}{e^{c(x-x_0)}+e^{-c(x-x_0)}} \quad 當\ x>x_0 \ ， \tag{4}$$

其中 c 為心理常數， $c>0$ ； x 為預期報酬率； x_0 為預期報酬率的基準點。雖然 Hershbarger (1975) 將 $\tanh(x)$ 函數引入效用函數之中並加入了基準點的概念，但是該模型限制在 $x>x_0$ ，就形態上而言仍然只是一個凹函數而不是 S 形函數。Bhattacharyya (2003) 主張人們的效用函數應為 S 形，低於目前財富水準的部分為凹函數，高

於目前財富水準的部分則為凸函數，並利用 $\tanh(x)$ 函數建構出 S 形效用函數如下：

$$U(W)=\tanh^{-1}\left(\frac{W-W_0}{W_0}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{W-W_0}{W_0}}{1-\frac{W-W_0}{W_0}}\right)\quad 當\ 0<W<2W_0， \tag{5}$$

其中 W_0 為目前的財富水準。Bhattacharyya (2003) 所建構的 $\tanh^{-1}(x)$ 效用函數雖然是 S 形函數，不過凹函數與凸函數的部分和展望理論中的價值函數正好相反，在展望理論中，低於目前財富水準的價值函數為凸函數，高於目前財富水準的價值函數則為凹函數。Fabiyi (2008) 利用 $\tanh(x)$ 函數建構出面對損失時為凸函數，面對利得時為凹函數的 S 形價值函數，其模型如下所示：

$$u(x)=\begin{cases}\tanh(\alpha^+x)=\dfrac{e^{\alpha^+x}-e^{-\alpha^+x}}{e^{\alpha^+x}+e^{-\alpha^+x}} & 當\ x\geq 0，\\[2ex] \tanh(\alpha^-x)=\dfrac{e^{\alpha^-x}-e^{-\alpha^-x}}{e^{\alpha^-x}+e^{-\alpha^-x}} & 當\ x<0，\end{cases} \tag{6}$$

其中 $\alpha^-=\phi\alpha^+$，α^+、α^- 和 ϕ 均為常數，$\alpha^+>0$，$\alpha^->0$，$\phi>1$。根據 (6) 式，當 $x>0$ 時，$-\tanh(-\alpha^-x)>\tanh(\alpha^+x)$，也就是說，雖然在 Fabiyi (2008) 的模型之中並沒有出現損失趨避係數，(6) 式似乎已經隱含了損失趨避的性質。但是，當我們再進一步去檢視 (6) 式的損失趨避特性之後卻發現 $\lim_{x\to 0^+}\tanh(\alpha^+x)=\lim_{x\to 0^-}\tanh(\alpha^-x)=0$，$\lim_{x\to\infty}\tanh(\alpha^+x)=\lim_{x\to-\infty}-\tanh(\alpha^-x)=1$，所以 Fabiyi (2008) 的模型並不完全符合損失趨避的精神。當我們對 (6) 式進行一次微分之後可知 $\lim_{x\to 0^+}\tanh'(\alpha^+x)\neq\lim_{x\to 0^-}\tanh'(\alpha^-x)$，因此，當 $x=0$ 時 Fabiyi (2008) 的模型並不具備一階連續可微分的特性。Podestá et al. (2008) 指出展望理論中的價值函數在財富變動量為零時會出現尖點 (sharp kink)，是不可微分的函數，乃利用 $\tanh(x)$ 函數建構新的價值函數如下：

$$v(\Delta W)=\frac{1}{2}\left[1-\lambda+(1+\lambda)\tanh(\varrho(\Delta W))\right]\left|\Delta W\right|^{\alpha}, \tag{7}$$

其中 λ 為損失趨避係數，$\lambda>1$；α 為風險趨避係數，$0<\alpha<1$；ϱ 為常數，$\varrho>1$；ΔW 為財富變動量。雖然 Podestá et al. (2008) 的模型將損失趨避的部分由 1 與 $-\lambda$ 的跳躍模式修改為連續模式，由 (7) 式可知，當 $\Delta W=0$ 時，該模型的一次微分並不存在。

Tversky and Kahneman (1992) 的價值函數同時考量了風險趨避與損失趨避二個因素，為了秉持展望理論的一貫精神，本研究修改 $\tanh(x)$ 函數，同時加入風險趨避與損失趨避因子。首先，我們加入風險趨避因子，將 $\tanh(x)$ 函數改寫為

$$\tanh(\beta x)=\frac{\sinh(\beta x)}{\cosh(\beta x)}=\frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}\text{。} \tag{8}$$

【命題 1】當 $x>0$ 且 $\beta>0$ 時，$\tanh(\beta x)$ 爲 x 的增函數並滿足邊際效用遞減的特性，且其絕對風險趨避係數爲 $2\beta\tanh(\beta x)$。

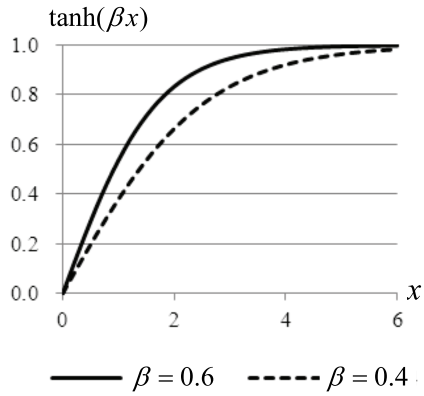
為了進一步檢視 $\tanh(\beta x)$ 中的 β 是否具備風險趨避係數的特質，我們將 β 對 $\tanh(\beta x)$ 的影響列於表 1。由表 1 可知，當 x 固定時，隨著 β 的增加 $\tanh(\beta x)$ 也會愈來愈大，這與常見的效用函數一致，故可將 β 視為風險趨避指標。

接下來，我們在 (8) 式之中加入損失趨避係數，建構出隱含處份效果的 $\tanh(x)$ 型態價值函數如下：[2]

---

[2] Tversky and Kahneman (1992) 所建構的價值函數以 $\Delta W_t=0$ 為參考點，$\Delta W_t>0$ 的部分引用冪次效用函數，$\Delta W_t<0$ 的部分則是將相對應的冪次效用函數乘上負的損失趨避係數 λ。根據 (1) 式，當 $\Delta W_t>0$ 時，$-V(-\Delta W_t)=\lambda V(\Delta W_t)>V(\Delta W_t)$。根據 (9) 式，當 $\Delta W_t>0$ 時，$-T(-\Delta W_t)=-\lambda\tanh(\beta(-\Delta W_t)/\lambda)=\lambda\tanh(\beta(\Delta W_t)/\lambda)>\tanh(\beta(\Delta W_t))=T(\Delta W_t)$，故 $T(\Delta W_t)$ 沿襲了 Tversky and Kahneman (1992) 對損失趨避係數 λ 的相關假設。

表 1　β 對 $\tanh(\beta x)$ 的影響

方程式	絕對風險趨避係數	圖形
$\frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}$	$2\beta\tanh(\beta x)$	

資料來源：本研究整理。

$$T(\Delta W_t)=\begin{cases}\dfrac{e^{\beta(\Delta W_t)}-e^{-\beta(\Delta W_t)}}{e^{\beta(\Delta W_t)}+e^{-\beta(\Delta W_t)}} & \text{當}\Delta W_t\geq 0\text{，}\\ \lambda\dfrac{e^{\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}-e^{-\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}}{e^{\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}+e^{-\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}} & \text{當}\Delta W<0\text{，}\end{cases} \tag{9}$$

其中 λ 為損失趨避係數，$\lambda>1$；β 為風險趨避係數，$\beta > 0$；ΔW_t 為財富變動量。令 ARA_T 表示 $T(\Delta W_t)$ 的絕對風險趨避係數，以下我們將探討價值函數 $T(\Delta W_t)$ 所具備的性質。

【命題 2】價值函數 $T(\Delta W_t)$ 具備以下性質：

(i) $T(\Delta W_t)$ 在財富變動量趨近於零時二次連續可微，即 $\lim_{\Delta W_t\to 0^+}T''(\Delta W_t)=\lim_{\Delta W_t\to 0^-}T''(\Delta W_t)=0$。

(ii) $T(\Delta W_t)$ 在財富變動量趨近於零時，其絕對風險趨避係數具連續性，即 $\lim_{\Delta W_t\to 0^+}ARA_T=\lim_{\Delta W_t\to 0^-}ARA_T=0$。

(iii) $T(\Delta W_t)$ 的絕對風險趨避係數與財富變動量成正向相關，即 $\partial ARA_T/\partial(\Delta W_T)>0$。

命題 2 的意涵如下：(i) 保留了價值函數的特質並具備二階連續可微分的特性；(ii) 解決了財富變動量趨近於零時，投資人風險偏好不合理的現象；(iii) 隱含處份效果成立。

由於 $\tanh(x)$ 是 x 的嚴格增函數，因此 $\tanh(x)$ 經常被用來進行效用函數的單調轉換（例如 Koornstra, 2007）。$T(\Delta W_t)$ 修正了 Fabiyi (2008) 的 $\tanh(x)$ 型態價值函數，不僅將損失趨避係數納入模型之中，也成功解決了價值函數在財富變動量等於零時並非二階連續可微分的問題。雖然二階連續可微分的 S 形函數不在少數，過去文獻卻未採用這些 S 形函數，其主要理由為這些 S 形函數無法同時保留價值函數的特質及二次連續可微分的特性。本論文所提出的 $T(\Delta W_t)$ 函數秉持展望理論的精神，同時考量風險趨避因子與損失趨避因子，不但支持處份效果，也具備二階連續可微分的特性，解決了價值函數在財富變動量趨近於零時風險偏好不合理的現象。

4. 結論

Shefrin and Statman (1985) 提出處份效果，主張投資人具有賣盈保虧的心態，傾向於太早實現獲利的股票，卻又不願處份損失的部位。實證研究也顯示人們在從事證券交易時的確存在處份效果。根據 Tversky and Kahneman (1992) 的模型，隨著獲利的增加，投資人傾向於持有更多的風險性資產，反之，隨著損失的增加，投資人則會逐漸出脫手中持有的風險性資產，這個現象和實證研究所發現的處份效果並不一致。此外，在 Tversky and Kahneman (1992) 的模型中，當財富變動量趨近於零時，投資人若非極端的風險趨避者就是極端的風險愛好者，這種極端的現象與經濟社會的實際狀況並不相符。由於目前學術上所發展出來的價值函數大都是以傳統的 HARA 效用函數做為基礎，最多只能達到一階連續可微分的階段，如果 S 形價值函在財富變動量等於零時並非二階連續可微分的話，

我們就無法解決財富變動量趨近於零時風險偏好不合理的現象。本文導入物理學中懸鏈線的概念，建構出一個二階連續可微分的 $\tanh(x)$ 型態價值函數，不僅支持處份效果，也解決了財富變動量趨近於零時風險偏好不合理的現象。

附錄

命題 2 的證明：

首先，我們檢視 $\Delta W_t = 0$ 時，$T(\Delta W_t)$ 的連續性，由 (9) 式可知 $\lim_{\Delta W_t \to 0^+} T(\Delta W_t) = \lim_{\Delta W_t \to 0^-} T(\Delta W_t) = 0$，故 $T(\Delta W_t)$ 為一個連續型的函數。

其次，我們對 $T(\Delta W_t)$ 進行一次微分可得到

$$T'(\Delta W_t) = \frac{\partial T(\Delta W_t)}{\partial(\Delta W_t)} = \begin{cases} \dfrac{4\beta}{\left(e^{\beta(\Delta W_t)} + e^{-\beta(\Delta W_t)}\right)^2} & \text{當 } \Delta W_t \geq 0\text{，} \\ \dfrac{4\beta}{\left(e^{\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)} + e^{-\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}\right)^2} & \text{當 } \Delta W_t < 0\text{。} \end{cases} \tag{A1}$$

由 (A1) 式可知 $\lim_{\Delta W_t \to 0^+} T'(\Delta W_t) = \lim_{\Delta W_t \to 0^-} T'(\Delta W_t) = \beta$，因此 $T(\Delta W_t)$ 為一階連續可微分的函數。

接下來，我們對 $T(\Delta W_t)$ 進行二次微分可得到

$$T''(\Delta W_t) = \frac{\partial^2 T(\Delta W_t)}{\partial(\Delta W_t)^2}$$

$$= \begin{cases} -8\beta^2 \dfrac{e^{\beta(\Delta W_t)} + e^{-\beta(\Delta W_t)}}{\left(e^{\beta(\Delta W_t)} + e^{-\beta(\Delta W_t)}\right)^3} & \text{當 } \Delta W_t \geq 0\text{，} \\ \dfrac{-8\beta^2}{\lambda} \dfrac{e^{\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)} - e^{-\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}}{\left(e^{\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)} + e^{-\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}\right)^3} & \text{當 } \Delta W_t < 0\text{。} \end{cases} \tag{A2}$$

由 (A2) 式可知 $\lim_{\Delta W_t \to 0^+} T''(\Delta W_t) = \lim_{\Delta W_t \to 0^-} T''(\Delta W_t) = 0$，所以 $T(\Delta W_t)$ 是一個二階連續可微分的函數。

最後，我們檢視 $T(\Delta W_t)$ 的絕對風險趨避係數

$$ARA_T=\frac{T''(\Delta W_t)}{T'(\Delta W_t)}=\begin{cases}2\beta\left(\dfrac{e^{\beta(\Delta W_t)}+e^{-\beta(\Delta W_t)}}{e^{\beta(\Delta W_t)}+e^{-\beta(\Delta W_t)}}\right) & \text{當}\Delta W_t\geq 0\text{，}\\ \dfrac{2\beta}{\lambda}\left(\dfrac{e^{\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}+e^{-\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}}{e^{\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}+e^{-\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}}\right) & \text{當}\Delta W_t<0\text{。}\end{cases} \tag{A3}$$

由 (A3) 式可知 $\lim_{\Delta W_t\to 0^+}ARA_T=\lim_{\Delta W_t\to 0^-}ARA_T=0$，也就是說 $T(\Delta W_t)$ 在財富變動量趨近於零時絕對風險趨避係數具連續性。將 ARA_T 對 ΔW_t 微分之後可得到

$$\begin{aligned}ARA_T&=\frac{\partial ARA_T}{\partial(\Delta W_t)}\\&=\begin{cases}\dfrac{8\beta^2}{\left(e^{\beta(\Delta W_t)}+e^{-\beta(\Delta W_t)}\right)^2}>0 & \text{當}\Delta W_t\geq 0\text{，}\\ \dfrac{8\beta^2}{\lambda^2\left(e^{\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}+e^{-\frac{\beta}{\lambda}(\Delta W_t)}\right)^2}>0 & \text{當}\Delta W_t<0\text{。}\end{cases}\end{aligned} \tag{A4}$$

由 (A4) 式可知 ARA_T 和 ΔW_t 存在同向變動的關係，ΔW_t 愈大（小）時 ARA_T 會跟著愈大（小），故 $T(\Delta W_t)$ 支持處份效果。

參考文獻

Allais, P. M. (1953), "Le Comportement de l'Homme Rationnel devant le Risque: Critique des Postulats et Axiomes de l'Ecole Americaine," *Econometrica*, 21:4, 503-546.

Barberis, N., M. Huang and T. Santos (2001), "Prospect Theory and Asset Prices," *The Quarterly Journal of Economics*, 116:1, 1-53.

Barberis, N. and W. Xiong (2009), "What Drives the Disposition Effect? An Analysis of a Long-Standing Preference-Based Explanation," *The Journal of Finance*, 64:2, 751-784.

Bernoulli, J. (1696), "Problema Novum ad Cujus Solutionem Mathematiei Invitantur," *Acta Eruditorum*, 264-269.

Bhattacharyya, N. (2003), "From Mean Variance Space to Mean Skewness Space-Implications for Simultaneous Risk Seeking and Risk Averting Behavior," SSRN Working Paper No. 290690.

Ellsberg, D. (1961), "Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms," *The Quarterly Journal of Economics*, 75:4, 643-669.

Fabiyi, M. E. (2008), "Proposing a Normative Basis for the S-Shaped Value Function," *Advances in Decision Making Under Risk and Uncertainty*, 42, 109-118.

Friedman, M. and L. J. Savage (1948), "The Utility Analysis of Choices Involving Risk," *Journal of Political Economy*, 56:4, 279-304.

Frino, A., D. Johnstone and H. Zheng (2004), "The Propensity for Local Traders in Futures Markets to Ride Losses: Evidence of Irrational or Rational Behavior?" *Journal of Banking & Finance*, 28:2, 353-372.

Grinblatt, M. and M. Keloharju (2001), "What Makes Investors Trade?" *The Journal of Finance*, 56:2, 589-616.

Heisler, J. (1994), "Loss Aversion in a Futures Market: An Empirical Test," *Review of Futures Markets*, 13:3, 793-826.

Hens, T. and M. Vlcek (2011), "Does Prospect Theory Explain the Disposition Effect?" *Journal of Behavioral Finance*, 12:3, 141-157.

Hershbarger, R. A. (1975), "Insurance Underwriting Capacity: A Psychometric Approach," *The Journal of Risk and Insurance*, 42:1, 51-68.

Hung, M. W. and J. Y. Wang (2005), "Asset Prices Under Prospect Theory and Habit Formation," *Review of Pacific Basin Financial Markets and Policies*, 8:1, 1-29.

Kahneman, D. and A. Tversky (1979), "Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk," *Econometrica*, 47:2, 263-291.

Kaustia, M. (2010), "Prospect Theory and the Disposition Effect," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 45:3, 791-812.

Koornstra, M. J. (2007), *Changing Choices: Psychological Relativity Theory*, Leiden: Amsterdam University Press.

Lichtenstein, S. and P. Slovic (1971), "Reversals of Preference between Bids and Choices in Gambling Decisions," *Journal of Experimental Psychology*, 89:1, 46-55.

Locke, P. R. and S. C. Mann (2005), "Professional Trader Discipline and Trade Disposition," *Journal of Financial Economics*, 76:2, 401-444.

Markowitz, H. (1952), "The Utility of Wealth," *Journal of Political Economy*, 60:2, 151-158.

Odean, T. (1998), "Are Investors Reluctant to Realize Their Losses?" *The Journal of Finance*, 53:5, 1775-1798.

Podestá, G., E. U. Weber, C. Laciana, F. Bert and D. Letson (2008), "Agricultural Decision Making in the Argentine Pampas: Modeling the Interaction between Uncertain and Complex Environments and Heterogeneous and Complex Decision Makers," *Decision Modeling and Behavior in Complex and Uncertain Environments*, 21, 57-76.

Pratt, J. W. (1964), “Risk Aversion in the Small and in the Large,” *Econometrica*, 32:1-2, 122-136.

Reilly, R. J. (1982), “Preference Reversal: Further Evidence and Some Suggested Modification in Experimental Design,” *The American Economic Review*, 72:3, 576-584.

Shapira, Z. and I. Venezia (2001), “Patterns of Behavior of Professionally Managed and Independent Investors,” *Journal of Banking & Finance*, 25:8, 1573-1587.

Shefrin, H. and M. Statman (1985), “The Disposition to Sell Winners Too Early and Ride Losers Too Long: Theory and Evidence,” *The Journal of Finance*, 40:3, 777-790.

Tversky, A. and D. Kahneman (1992), “Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty,” *Journal of Risk and Uncertainty*, 5:4, 297-323.

von Neumann, J. and O. Morgenstern (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton: Princeton University Press.

Weber, M. and C. F. Camerer (1998), “The Disposition Effect in Securities Trading: An Experimental Analysis,” *Journal of Economic Behavior & Organization*, 33:2, 167-184.

A Revised Value Function to Connote the Disposition Effect

Guo, Zion and Ming-Kai Chen

Abstract

The definition of the disposition effect is when investors tend to realize profit gains, but are reluctant to realize losses. Because the value function proposed by Tversky and Kahneman (1992) cannot explain the disposition effect, we develop a $\tanh(x)$-form value function by using the essence of the prospect theory. This explains the disposition effect and solves for the phenomenon of unreasonable risk attitudes when the change of wealth approaches zero.

Keywords: Prospect Theory, Value Function, Disposition Effect
JEL Classification: D03, D81, G02

Guo, Zion, Department of Finance, National Changhua University of Education, No. 2, Shi-Da Rd., Changhua City 50074, Taiwan, R.O.C., Tel: 886-4-7232105 ext. 7344, E-mail: zionguo@cc.ncue.edu.tw. Ming-Kai Chen, Taichung Municipal Hiang Shang Junior High School, No. 389, Sec. 1, Meicun Rd., West Dist., Taichung City 40359, Taiwan, R.O.C., Tel: 886-4-23726085 ext. 710, E-mail: tajk@nmail.hsjh.tc.edu.tw.
Received 18 March 2012; revised 15 May 2012; accepted 16 September 2013.